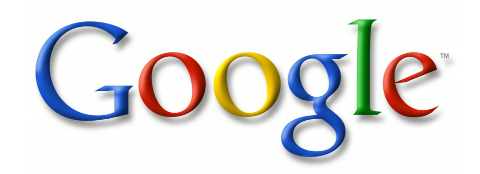
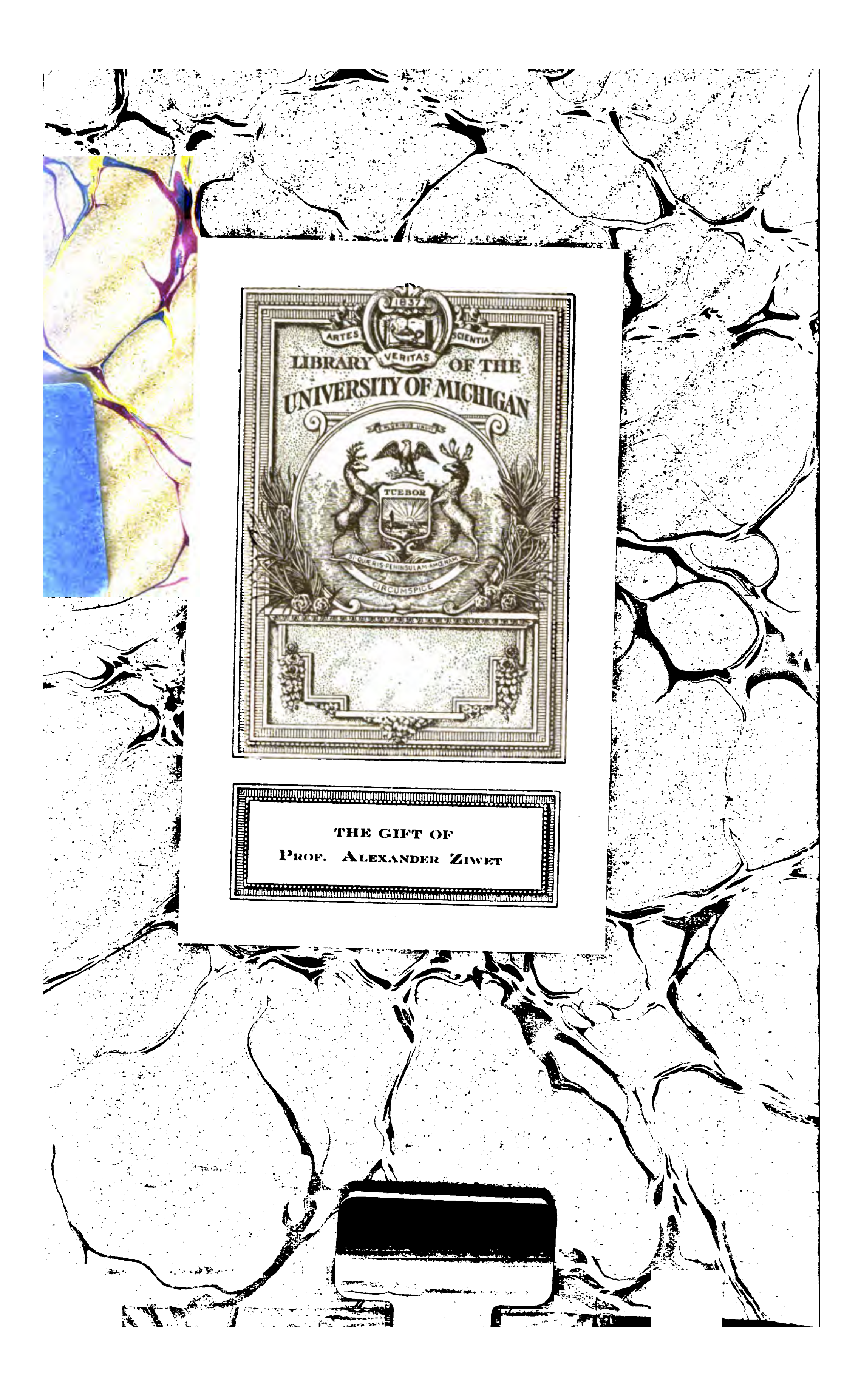

Google


B 480663


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



COURS
DE MÉCANIQUE.

COURS
DE MÉCANIQUE

À L'USAGE DES CANDIDATS

À L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES;

PAR



P. APPELL,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1902

Prof. Alex. Ziwet
gt.
2-5-1923

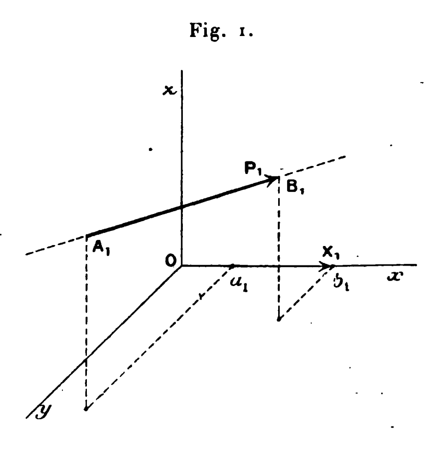
COURS

DE MÉCANIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES GRANDEURS GÉOMÉTRIQUES.

1. Grandeurs géométriques : Vecteurs et segments. — Une grandeur géométrique ou vecteur est une portion de droite $A_1 B_1$ (*fig.* 1) ayant une origine A_1 et une extrémité B_1. Un vecteur est défini par les éléments suivants : 1° son *origine* ou *point d'application* A_1 ; 2° sa *direction*, qui est celle de la droite indéfinie $A_1 B_1$; 3° son *sens*, qui est celui du mouvement d'un mobile allant de l'origine A_1 vers l'extrémité B_1, et que l'on indique par une flèche placée à l'extrémité ; 4° sa *grandeur* P_1, qui est la longueur $A_1 B_1$.

Fig. 1.



Analytiquement, on définit un vecteur par les coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x'_1, y'_1, z'_1) de l'origine et de l'extrémité par rapport à trois axes coordonnés, ou encore par les coordonnées (x_1, y_1, z_1) de l'origine et les projections (X_1, Y_1, Z_1) du vecteur A_1B_1 sur les trois axes, ces projections ayant des signes, suivant les conventions ordinaires de la Géométrie analytique.

D'après ces conventions, si l'on appelle a_1 et b_1 les projections des points A_1 et B_1 sur l'axe Ox, X_1 est la valeur algébrique du *segment* $a_1 b_1$, c'est-à-dire la longueur $a_1 b_1$ précédée du signe + ou du signe — suivant qu'un mobile, allant de a_1 en b_1, marche dans le sens positif ou le sens négatif de l'axe.

On a alors, dans tous les cas de figure,

$$X_1 = x'_1 - x_1, \qquad Y_1 = y'_1 - y_1, \qquad Z_1 = z'_1 - z_1.$$

Nous désignerons habituellement un vecteur par une seule lettre P_1, représentant sa longueur ou grandeur, et placée à l'extrémité.

Pour montrer que les formules donnant X_1, Y_1, Z_1 sont générales, nous rappellerons quelques propriétés élémentaires des segments qui nous serviront également à démontrer plus loin le théorème des projections.

2. Théorème des segments. — Quand des vecteurs sont portés par une même droite indéfinie, comme le sont par exemple les projections de divers vecteurs sur l'axe Ox, on leur donne plus particulièrement le nom de *segments; a* et *b* étant deux points sur un axe orienté, d'après les conventions précédentes, si le segment *ab* est positif, le segment *ba* est négatif.

Nous avons donc

$$ab = -ba$$

et, par suite,

$$ab + ba = 0.$$

D'une façon générale : *Lorsqu'on place sur une droite $x'x$, n points a, b, c, ..., h, k, l, la somme des n segments consécutifs ab, bc, ..., hk, kl, la, déterminés sur cette droite par les points considérés, est toujours nulle, quel que soit l'ordre dans lequel ces points sont placés.*

Pour le démontrer, nous emploierons un point auxiliaire placé sur la droite $x'x$ à gauche de tous les points a, b, c, d, ..., k, l (*fig.* 2).

Fig. 2.

Considérons d'abord, sur la droite $x'x$, les trois points o, a, b; deux cas peuvent se présenter suivant que le point b est à droite ou à gauche de a.

Supposons, en premier lieu, que le point b soit à droite de a. Nous aurons

$$oa + ab = ob. \tag{1}$$

Si nous supposons maintenant le point b à gauche de a, nous aurons

$$ob + ba = oa,$$

d'où

$$oa - ba = ob$$

ou

$$oa + ab = ob.$$

La relation (1) existe donc dans les deux cas. Nous pourrons donc écrire la suite d'égalités

$$\begin{aligned} oa + ab &= ob, \\ ob + bc &= oc, \\ oc + cd &= od, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ ok + kl &= ol, \\ ol + la &= oa, \end{aligned}$$

Si nous les ajoutons membre à membre, nous aurons, en

faisant disparaître les termes communs aux deux membres :

$$(2) \qquad ab + bc + cd + \ldots + kl + la = 0,$$

relation qui démontre la propriété énoncée.

Analytiquement, prenons une origine O sur la droite $x'x$ qui porte les segments, et soient x et x' les abscisses des extrémités a et b d'un segment ab; on a

$$ab = x' - x;$$

en effet, d'après la définition même des coordonnées, les segments Oa et Ob sont égaux à x et x'; dès lors, en appliquant la relation générale ci-dessus aux trois points O, a, b, on a

$$ab = Ob - Oa,$$

c'est-à-dire

$$ab = x' - x.$$

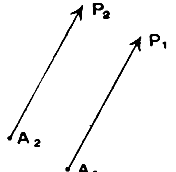
La projection d'un vecteur $A_1 B_1$ sur un axe Ox est donc bien donnée, dans tous les cas, par la formule

$$X_1 = x'_1 - x_1.$$

En partant de cette expression analytique d'un segment, on vérifie immédiatement que la relation (2) est une identité.

3. Quelques définitions. — *Deux vecteurs sont identiques* quand ils ont même origine, même direction, même sens et même longueur, c'est-à-dire quand ils se confondent.

Fig. 3.



Deux vecteurs sont égaux quand ils ont même direction (*fig.* 3), même sens et même longueur, mais sans avoir nécessairement même point d'application. D'après cela, pour que deux vecteurs P_1 et P_2 de projections respectives X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2 soient égaux,

il faut et il suffit que l'on ait

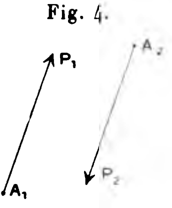
$$(3) \qquad X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad Z_1 = Z_2.$$

Nous désignerons l'égalité géométrique de deux vecteurs P_1 et P_2 par la relation

$$(P_1) = (P_2),$$

en mettant les vecteurs entre parenthèses : cette relation unique est donc équivalente à l'ensemble des équations (3).

Fig. 4.



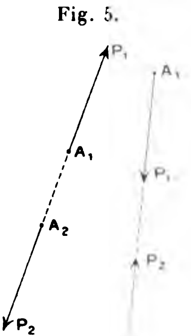
Deux vecteurs sont égaux et opposés quand ils sont parallèles, de même longueur (*fig.* 4), *mais de sens contraires;* ils forment alors ce qu'on appelle un *couple de vecteurs.* Ce fait est exprimé par les relations suivantes entre les projections des deux vecteurs P_1 et P_2

$$X_1 = -X_2, \quad Y_1 = -Y_2, \quad Z_1 = -Z_2;$$

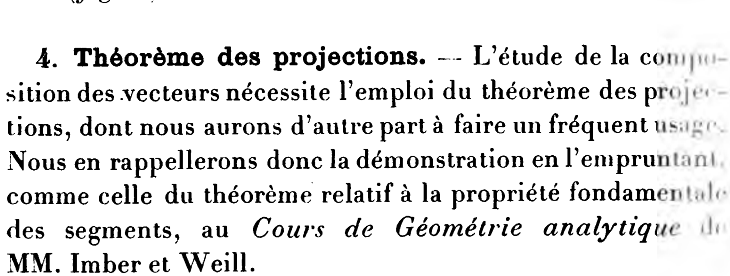
nous l'exprimerons pour abréger par la notation

$$(P_1) = -(P_2).$$

Fig. 5.



Deux vecteurs sont égaux et directement opposés quand ils sont égaux, opposés et dirigés suivant la même droite indéfinie (*fig.* 5).



4. Théorème des projections. — L'étude de la composition des vecteurs nécessite l'emploi du théorème des projections, dont nous aurons d'autre part à faire un fréquent usage. Nous en rappellerons donc la démonstration en l'empruntant, comme celle du théorème relatif à la propriété fondamentale des segments, au *Cours de Géométrie analytique* de MM. Imber et Weill.

Théorème I. — *La somme algébrique des projections des vecteurs formant les éléments d'un contour polygonal fermé, plan ou gauche, est nulle.*

Soit le contour polygonal fermé ABCDEFA (*fig.* 6). Projetons sur l'axe $x'x$ ses différents sommets; soient a, b, c, d, e, f ces projections.

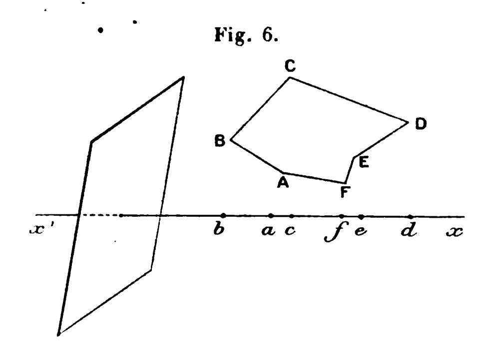


Fig. 6.

Nous imaginons que la ligne polygonale est décrite par un point mobile partant de A et rencontrant les différents sommets dans l'ordre ABCDEFA.

Considérons maintenant, sur l'axe $x'x$, les segments déterminés par les points a, b, c, d, e, f; on a, d'après le théorème général relatif aux segments,

$$ab + bc + cd + de + ef + fa = 0,$$

mais les segments ab, bc, ..., fa sont en grandeurs et en signes les projections des vecteurs AB, BC, ..., FA, éléments du contour. La propriété est donc démontrée.

Théorème II. — *La somme algébrique des projections des éléments d'un contour polygonal, non fermé, plan ou gauche, est égale à la projection de la résultante.*

Considérons le contour polygonal non fermé ABCDEF (*fig.* 7). Nous imaginons, comme précédemment, le contour polygonal décrit par un point mobile partant de A et rencontrant par suite les sommets dans l'ordre ABCDEF. On

dit alors que A est l'*origine du contour* et F son *extrémité*. Si l'on mène la droite AF qui joint l'origine A à l'extrémité F, on dit que ce vecteur qui ferme le contour est la *résultante* des éléments du contour; A est son origine, F son extrémité.

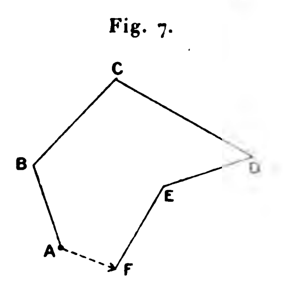


Fig. 7.

Si nous considérons le contour polygonal fermé ABCDEFA, nous avons, d'après le théorème précédent,

$$ab + bc + cd + de + ef + fa = 0,$$

d'où nous tirons

$$ab + bc + cd + de + ef = -fa,$$

mais

$$-fa = af,$$

par suite,

$$ab + bc + cd + de + ef = af;$$

la proposition est donc démontrée.

Théorème III. — *Lorsque deux contours polygonaux non fermés ont même origine et même extrémité, c'est-à-dire ont la même résultante, les sommes algébriques des projections des éléments des deux contours sont égales.*

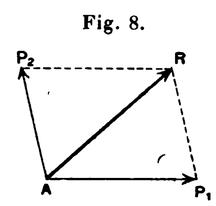
C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente, puisque ces sommes sont toutes deux égales à la projection du vecteur qui ferme les deux contours.

5. Somme géométrique ou composition des vecteurs concourants. — Des vecteurs sont dits *concourants* quand ils ont même origine.

Deux vecteurs. — Soient d'abord deux vecteurs AP_1 et

AP_2 d'origine commune A; par l'extrémité P_1 de l'un des vecteurs menons un vecteur P_1R (*fig.* 8), égal géométriquement à l'autre AP_2. Le vecteur AR d'origine A et d'extrémité R est la *somme géométrique* ou *résultante* des deux vecteurs donnés. On écrit

Fig. 8.



$$(R) = (P_1) + (P_2),$$

les parenthèses indiquant qu'il s'agit d'une égalité géométrique.

La somme des deux vecteurs P_1 et P_2 est évidemment indépendante de l'ordre dans lequel on prend les deux vecteurs; si par l'extrémité P_2 du deuxième on menait un vecteur P_2R égal géométriquement au premier P_1, on aboutirait évidemment au même point R, car la figure AP_1RP_2 est un parallélogramme; on peut donc écrire aussi

$$(R) = (P_2) + (P_1).$$

La grandeur R du vecteur résultant se calcule immédiatement dans le triangle AP_1R; appelons $\widehat{P_1P_2}$ l'angle des deux vecteurs composants P_1AP_2; l'angle AP_1R est le supplément de cet angle; on a donc

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\widehat{P_1P_2}.$$

Détermination analytique de la résultante de deux vecteurs. — Prenons trois axes quelconques et appelons X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2 les projections des deux vecteurs AP_1 et AP_2, X, Y, Z celles du vecteur résultant AR.

D'après le théorème des projections, si l'on considère le contour polygonal AP_1R et le vecteur AR ayant même origine et même extrémité, la projection de AR sur un axe est égale à la somme des projections des côtés AP_1 et P_1R du contour;

en projetant successivement sur les trois axes on a ainsi les trois équations

$$X = X_1 + X_2, \qquad Y = Y_1 + Y_2, \qquad Z = Z_1 + Z_2$$

qui définissent la résultante.

Examinons quelques cas particuliers. Il peut arriver que l'angle des vecteurs P_1 et P_2 soit nul : alors les deux vecteurs composants ont même direction et même sens ; le vecteur résultant a également la même direction et le même sens et sa grandeur est égale à la somme des grandeurs des vecteurs composants.

Fig. 9.

Il peut arriver que l'angle des deux vecteurs donnés soit de 180° ; ces deux vecteurs ont alors des sens opposés (*fig.* 9). Le vecteur résultant AR a le sens du plus grand des deux et pour longueur la différence des deux longueurs.

Il peut arriver enfin que les vecteurs P_1 et P_2 soient égaux et opposés ; alors leur somme est nulle : le point R coïncide avec le point A.

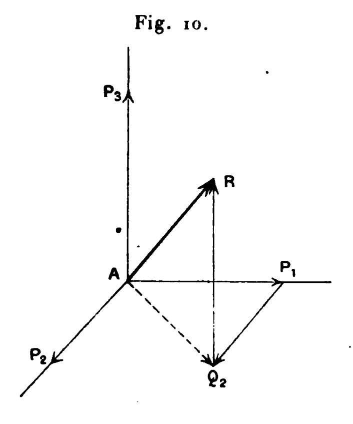


Fig. 10.

Trois vecteurs. — Soient trois vecteurs P_1, P_2, P_3 d'origine commune A. Par l'extrémité P_1 du premier vecteur menons un vecteur P_1Q_2 égal au deuxième P_2, puis par le point Q_2 un vecteur Q_2R égal au troisième P_3 (*fig.* 10). Le vecteur AR, d'origine A et d'extrémité R, est la somme géométrique des trois vecteurs donnés. Ce vecteur est indépendant de l'ordre dans lequel on prend les trois vecteurs donnés, car le point R

est le sommet opposé au point A dans le parallélépipède construit sur AP_1, AP_2, AP_3.

Pour exprimer que R est la résultante de P_1, P_2, P_3, on écrit l'égalité géométrique

$$(R) = (P_1) + (P_2) + (P_3).$$

On peut remarquer que, pour obtenir R, on peut faire d'abord la somme de deux des vecteurs, puis composer cette somme avec le troisième. Par exemple, dans la *fig.* 10, le vecteur AQ_2 représente la somme géométrique de P_1 et P_2 et AR est la résultante de cette somme et de P_3.

Analytiquement, appelons X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3 les projections des vecteurs composants P_1, P_2, P_3 et X, Y, Z celles du vecteur résultant R. Le vecteur AR fermant le contour polygonal AP_1Q_2R, sa projection sur un axe quelconque est égale à la somme des projections des côtés du contour sur le même axe. On a donc

$$X = X_1 + X_2 + X_3,$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3,$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3.$$

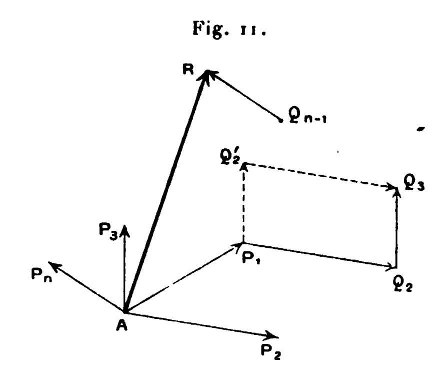
Il peut arriver que la somme géométrique soit nulle; cela aura lieu si le point R coïncide avec A; alors X, Y, Z seront nuls.

Cas général. — Soient n vecteurs P_1, P_2, ..., P_n d'origine commune A. Par l'extrémité P_1 du premier menons un vecteur P_1Q_2 (*fig.* 11) égal au deuxième P_2, par Q_2 un vecteur Q_2Q_3 égal au troisième P_3, ... et ainsi de suite, par Q_{n-1} un vecteur $Q_{n-1}R$ égal au dernier P_n. La droite AR est la *somme géométrique* ou *résultante des vecteurs donnés*.

Cette somme est indépendante de l'ordre dans lequel on prend les vecteurs composants pour les porter bout à bout. Cela résulte de ce que l'on peut intervertir l'ordre de deux vecteurs composants consécutifs sans en altérer la somme : en effet, si l'on intervertissait P_2 et P_3, on aurait à mener

par P_1 un vecteur $P_1Q'_2$ égal à P_3, puis par Q'_2 un vecteur Q'_2Q_3 égal à P_2; on arriverait ainsi au même point Q_3, car la figure $P_1Q_2Q_3Q'_2$ est un parallélogramme. Puisqu'on peut intervertir deux vecteurs consécutifs, on peut les ranger dans un ordre quelconque sans changer leur somme géométrique. Ce fait résulte d'ailleurs immédiatement de la détermination analytique de la résultante.

Fig. 11.



Si l'on appelle X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; ...; X_n, Y_n, Z_n les projections des composantes, X, Y, Z celles de la résultante, le théorème des projections donne

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n,$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n.$$

Ces valeurs X, Y, Z sont évidemment indépendantes de l'ordre dans lequel on prend les composantes.

On voit aussi que, pour faire la somme géométrique de vecteurs concourants, on peut les partager en groupes d'une façon quelconque, faire la somme des vecteurs de chaque groupe, puis la somme de ces sommes.

Pour exprimer que R est la somme géométrique de P_1, P_2, ..., P_n, nous écrirons en mettant des parenthèses

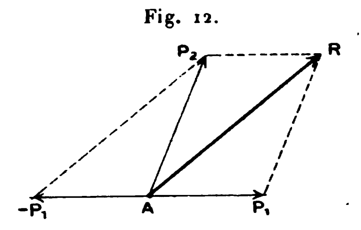
$$(R) = (P_1) + (P_2) + \ldots + (P_n).$$

6. Différence géométrique ou décomposition d'un vecteur en vecteurs concourants. — Dans certains cas on décompose un vecteur donné en vecteurs concourants, c'est-à-dire qu'on détermine des vecteurs dont le vecteur donné est la résultante. Ce problème n'est pas déterminé sous cette

forme générale, pas plus que ne serait en Arithmétique le problème de décomposer une somme en parties; nous allons en examiner quelques cas particuliers.

1° **Décomposer un vecteur R en deux composantes, connaissant l'une de ses composantes.** — Soit AR un vecteur (*fig.* 12), AP_1 une de ses composantes, l'autre composante AP_2 sera égale au vecteur P_1R. Ce vecteur P_2 qui, ajouté géométriquement à P_1, donne le vecteur R, s'appelle la *différence géométrique* de R et P_1 et l'on écrit

Fig. 12.



$$(P_2) = (R) - (P_1);$$

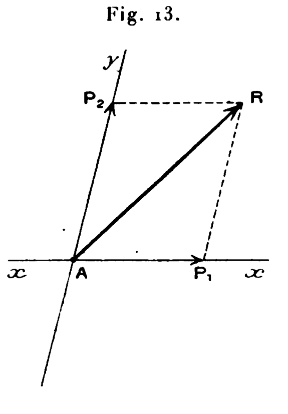
cette relation peut alors être considérée comme une conséquence de la relation

$$(R) = (P_1) + (P_2).$$

On peut construire aussi P_2 en remarquant que P_2 est la résultante de R et d'un vecteur $(-P_1)$ égal et opposé à P_1.

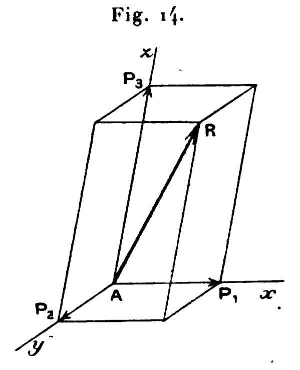
2° **Décomposition d'un vecteur suivant deux directions.** — Soit un vecteur AR et deux directions différentes Ax et Ay (*fig.* 13) *qui sont dans un même plan avec* AR. On peut toujours, et d'une seule façon, décomposer AR suivant ces deux directions : pour cela il suffit de mener par R des parallèles aux deux directions données et de prendre les points P_1, P_2 où ces parallèles coupent les droites indéfinies Ax et Ay; les deux vecteurs AP_1 et AP_2 répondent à la question.

Fig. 13.



3° **Décomposition d'un vecteur suivant trois directions données.** — Soient trois directions Ax, Ay et Az, formant un trièdre (*fig.* 14); on peut toujours décomposer un vecteur AR en trois autres dirigés suivant ces trois directions; pour cela on mène par R des plans parallèles respectivement aux trois plans yAz, zAx, xAy; ces trois plans coupent les droites indéfinies Ax, Ay, Az en trois points P_1, P_2, P_3; les trois vecteurs AP_1, AP_2, AP_3 répondent à la question.

Fig. 14.



CINÉMATIQUE DU POINT.

A. — MOUVEMENT RECTILIGNE.

7. Définitions. — Quand on dit qu'un corps est *en repos* ou *en mouvement,* on sous-entend toujours que ce repos ou ce mouvement ont lieu par rapport à certains autres corps : ainsi un objet immobile à la surface de la Terre est en repos par rapport à la Terre, la Terre elle-même est en mouvement par rapport au Soleil. En d'autres termes on n'observe que des *mouvements relatifs*. Cependant on peut imaginer trois axes de coordonnées absolument fixes : le mouvement d'un corps par rapport à ces axes s'appellera *mouvement absolu* du corps. Le mouvement absolu est donc une pure abstraction; mais les mouvements relatifs pouvant toujours être ramenés aux mouvements absolus et ceux-ci étant soumis à des lois plus simples en Dynamique, il convient de commencer par l'étude du mouvement absolu. Pour la même raison on étudiera d'abord le *mouvement d'un point* avant d'aborder l'étude du mouvement d'un corps de forme quelconque.

Le point en mouvement est un *mobile,* et le lieu des positions qu'il occupe successivement constitue sa *trajectoire*. La *science du mouvement* considéré indépendamment des causes qui le produisent s'appelle la *Cinématique*. Elle résulte de la combinaison des deux idées d'*espace* et de *temps* et ne nécessite, par suite, que l'emploi des deux unités fondamentales de *longueur* et de *temps,* pour l'évaluation de toutes les grandeurs qu'on y définit et qu'on y mesure.

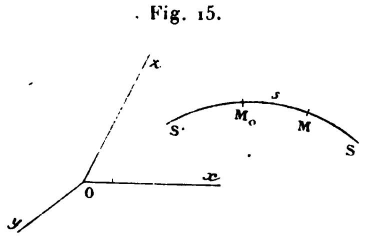
8. Mouvement d'un point. — Soient trois axes Ox, Oy,

Oz, absolument fixes et un point mobile M, dont les coordonnées (*fig.* 15) x, y, z sont des fonctions continues données du temps t,

$$x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t), \qquad z = \psi(t).$$

La courbe décrite par le point est la trajectoire du mobile : ses équations s'obtiennent en éliminant t entre les équations qui définissent x, y, z, en fonction de t et qu'on appelle les *équations du mouvement*. On peut aussi définir le mouvement de la façon suivante : on donne la trajectoire, puis, prenant sur cette trajectoire un point M_0 comme origine des arcs, un sens M_0S comme sens des arcs positifs, on donne en fonction du temps la valeur algébrique s de l'arc M_0M qui sépare le mobile du point M_0, appelé *origine des espaces*.

Fig. 15.



9. Mouvement rectiligne. — On dit que le mouvement est rectiligne quand la trajectoire est une droite. Si l'on prend cette droite pour axe des x, les deux modes précédents de définition du mouvement se confondent et le mouvement est défini par l'expression de l'abscisse du mobile en fonction du temps,

$$x = \varphi(t),$$

qu'on appelle l'*équation du mouvement*.

On prendra sur la droite un point fixe O qui sera l'origine des espaces, et à partir duquel on portera, à droite ou à gauche, les espaces suivant que x sera positif ou négatif.

10. Mouvement uniforme. — Le mouvement rectiligne le plus simple est le mouvement uniforme. C'est un mouve-

ment dans lequel *le mobile marche toujours dans le même sens* de telle façon que les *espaces parcourus soient proportionnels aux temps employés à les parcourir.*

Un cycliste suivant une route droite à une allure régulière donne l'image du mouvement rectiligne uniforme. S'il fait, par exemple, 7^m à la seconde, il fera 14^m en deux secondes, 21^m en trois secondes, $3^m,50$ en une demi-seconde, etc.

Équation du mouvement. — Soient x_0 l'abscisse du mobile à l'origine des temps $t = 0$, x son abscisse à l'instant t : le rapport

$$\frac{x - x_0}{t}$$

est, en valeur absolue, égal au rapport du chemin parcouru au temps employé à le parcourir; ce rapport a donc une valeur absolue constante. Nous allons voir, en outre, que le signe de ce rapport est constant et que ce signe indique le sens dans lequel se meut le mobile.

1° Le mobile se meut dans le sens positif de Ox; alors, quand le temps croît, x croît également; si donc t est positif, $x - x_0$ l'est aussi et le rapport est positif; si t est négatif, $x - x_0$ l'est aussi et le rapport est encore positif; on a donc dans ce cas

$$\frac{x - x_0}{t} = k,$$

k désignant une *constante positive.*

2° Le mobile se meut dans le sens négatif de Ox. Alors, quand le temps croît, x décroît; si donc t est positif, $x - x_0$ est négatif et inversement; le rapport est donc négatif et l'on a

$$\frac{x - x_0}{t} = k,$$

k désignant une *constante négative.*

En résumé, l'équation du mouvement uniforme est dans tous les cas

$$x = x_0 + kt.$$

Réciproquement, tout mouvement défini par une équation du premier degré entre x et t de la forme ci-dessus est uniforme : en effet le mouvement défini par

$$x = x_0 + kt$$

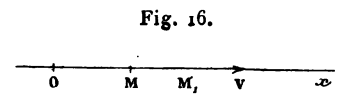
possède, quels que soient x_0 et k, les deux propriétés qui caractérisent le mouvement uniforme. D'abord, le mobile marche toujours dans le même sens, car, t croissant, x augmente quand k est positif et diminue quand k est négatif; ensuite les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir, car, en appelant Δx la variation subie par l'abscisse quand t croît de Δt, on a

$$x = x_0 + kt, \qquad x + \Delta x = x_0 + k(t + \Delta t),$$
$$\Delta x = k\,\Delta t, \qquad \frac{\Delta x}{\Delta t} = k,$$

ce qui démontre la deuxième propriété.

Vitesse. — Soit M la position du mobile à l'instant t, M_1 sa position à l'instant $t + \Delta t$, Δt étant positif; la grandeur géométrique MM_1 a pour valeur algébrique, estimée suivant l'axe Ox, Δx. Si dans le sens MM_1 on porte, à partir de M, une longueur MV égale à $\frac{MM_1}{\Delta t}$, *la grandeur géométrique* MV (*fig.* 16) est la *vitesse du mouvement uniforme*.

Fig. 16.



On appelle *valeur algébrique* v de cette vitesse la longueur du segment vitesse MV, précédée du signe + ou du

signe —, suivant que ce segment est dirigé dans le sens positif ou le sens négatif de l'axe. On a alors, en grandeur et en signe,

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

car la valeur absolue de MM_1 est égale à celle de Δx et le signe de v est le même que celui de Δx.

D'après l'équation du mouvement, la vitesse du mouvement rectiligne uniforme est constante en grandeur, direction et sens, car on a, quels que soient t et Δt,

$$\Delta x = k\,\Delta t, \qquad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = k.$$

Si $\Delta t = 1$, on voit que $v = \Delta x$; on peut donc dire que *la vitesse dans un mouvement rectiligne uniforme est, en grandeur, direction et sens, l'espace parcouru dans l'unité de temps.*

Signification physique des constantes. — La constante x_0 représente l'abscisse du mobile à l'origine des temps. La constante k est la vitesse v du mobile. On peut donc écrire l'équation générale du mouvement uniforme

$$x = x_0 + vt,$$

où la signification des constantes est en évidence.

En particulier, si l'on convient de prendre pour origine des espaces la position du mobile à l'instant $t = 0$, x_0 est nul et l'équation du mouvement prend la forme simple

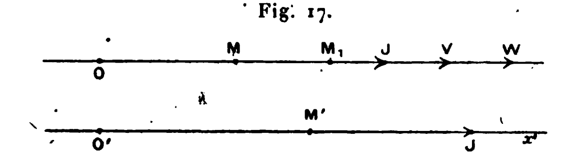
$$x = vt.$$

11. Mouvement rectiligne varié. — Tout mouvement qui n'est pas uniforme est dit *varié*. Soit un mouvement rectiligne varié défini par l'équation $x = \varphi(t)$. Le déplacement MM_1 que

subit le mobile quand t croît de Δt est une grandeur géométrique dont la valeur algébrique est Δx.

Vitesse. — Si dans le sens MM_1 (*fig.* 17) on porte une

Fig. 17.



longueur MW égale à $\frac{MM_1}{\Delta t}$, le vecteur MW, dont la valeur algébrique est $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, s'appelle *vitesse moyenne* du mobile dans l'intervalle de temps Δt. C'est la vitesse que posséderait un mobile fictif animé d'un mouvement uniforme et allant de M en M_1 pendant le même temps Δt. Si Δt tend vers zéro, le vecteur MW tend vers un vecteur limite MV dont l'expression algébrique v est la dérivée x'_t ou $\frac{dx}{dt}$ ou $\varphi'(t)$, que l'on appelle *vitesse* du mobile *à l'instant t*.

Exemple. — Il est évident que dans un mouvement uniforme

$$x = x_0 + kt$$

nous devons, en appliquant la règle générale, retrouver pour la valeur algébrique de la vitesse à un instant le nombre k que nous avons appelé *vitesse* de ce mouvement. On a, en effet, en prenant la dérivée de x par rapport à t,

$$v = x'_t = \frac{dx}{dt} = k.$$

Réciproquement, nous pouvons maintenant démontrer que, si dans un mouvement rectiligne la vitesse à chaque instant est constante, ce mouvement est uniforme. En effet, la vitesse étant égale à une constante k, la dérivée de x par rapport à t

est égale à k,

$$\frac{dx}{dt} = k,$$

d'où, en remontant à la fonction primitive,

$$x = x_0 + kt,$$

x_0 désignant une constante. Le mouvement est donc uniforme.

Accélération. — Un mouvement rectiligne uniforme peut être caractérisé par ce fait que sa vitesse à chaque instant est constante en grandeur et direction. Dans un mouvement rectiligne varié, la vitesse est variable et il est utile de se rendre compte, d'une façon précise, de la variation de la vitesse aux divers instants du mouvement. On est ainsi conduit à la notion du vecteur *accélération*.

Imaginons un mobile M parcourant l'axe Ox et possédant à l'instant t la vitesse représentée par le vecteur MV dont la valeur algébrique est v (*fig.* 17). Quand t varie, la vitesse MV conserve la même direction, mais varie en grandeur et en sens. Prenons une origine fixe O' et menons à partir de cette origine un segment O'M' égal et parallèle à MV; quand t varie, les points M' se trouvent tous sur un axe O'x' parallèle à Ox, et l'abscisse x' du point M' sur cet axe est évidemment égale à la vitesse v du point M : $x' = v$.

Si la vitesse du point M était constante, le point auxiliaire M' serait immobile; la vitesse du point M étant variable avec t, le point M' se déplace et cela d'autant plus vite que la vitesse de M varie plus rapidement.

On appelle *accélération du point* M *à l'instant* t un vecteur MJ égal à la vitesse M'J du point M'. La valeur algébrique γ de ce vecteur est la valeur algébrique de l'accélération : on a donc

$$\gamma = \frac{dx'}{dt} = \frac{dv}{dt},$$

ou encore, comme v est la dérivée première de x par rapport à t

$$\gamma = x''_t = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

En résumé l'accélération est, comme la vitesse, un vecteur MJ dont la valeur algébrique γ est la dérivée de v par rapport à t, c'est-à-dire la dérivée deuxième de x par rapport à t.

Exemple. — Dans un mouvement rectiligne et uniforme le vecteur vitesse est constant en grandeur et direction, $v =$ const.; l'accélération est donc nulle. Réciproquement, si un mouvement rectiligne est tel que son accélération soit constamment nulle, il est uniforme. En effet, dans cette hypothèse on aurait

$$\frac{dv}{dt} = 0;$$

donc v serait constante et le mouvement uniforme.

Mouvement rectiligne accéléré ou retardé. — On dit qu'un mouvement est accéléré quand sa vitesse croît en valeur absolue; il est retardé quand sa vitesse décroît en valeur absolue. En d'autres termes le mouvement est accéléré ou retardé suivant que le carré v^2 augmente ou diminue.

Donc le mouvement est *accéléré* quand la dérivée

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2v\frac{dv}{dt} = 2v\gamma$$

est *positive*, il est *retardé* quand cette même quantité est *négative*. On peut dire aussi que le mouvement est accéléré quand v et γ ont le même signe, c'est-à-dire quand les vecteurs vitesse et accélération ont le même sens; il est retardé dans le cas contraire.

12. Mouvement rectiligne uniformément varié. — Nous avons vu, plus haut, que le mouvement uniforme est caractérisé par ce fait que son accélération est *nulle*. Le mouvement rectiligne qui se présente comme le plus simple, après le mouvement uniforme, est alors un mouvement dans lequel l'accélération aurait une valeur *constante* différente de *zéro*. Un tel mouvement est dit *uniformément varié*.

Équation du mouvement. — Soit γ la valeur *constante* de l'accélération; on aura, en appelant v la valeur algébrique de la vitesse,

$$\frac{dv}{dt} = \gamma;$$

d'où, en prenant la fonction primitive,

$$v = v_0 + \gamma t, \tag{1}$$

v_0 désignant la vitesse du mobile à l'instant $t = 0$. Mais $v = \frac{dx}{dt}$; on a donc

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \gamma t,$$

d'où, en prenant la fonction primitive et remarquant que v_0 et γ sont constants,

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2, \tag{2}$$

x_0 étant une constante qui représente la valeur de x pour $t = 0$, c'est-à-dire l'abscisse du mobile à l'origine du temps. Cette équation (2) est l'équation du mouvement *uniformément varié*.

On voit que, dans l'équation du mouvement, x est une fonction du deuxième degré en t. Inversement, toutes les fois que x est une fonction du deuxième degré en t

$$x = a + bt + ct^2,$$

le mouvement est uniformément varié, car en prenant la dérivée première on a la vitesse

$$v = b + 2ct$$

et en prenant encore une fois la dérivée on a l'accélération

$$\gamma = 2c$$

qui est constante.

Théorème. — *Dans un mouvement uniformément varié la variation Δv de la vitesse pendant un intervalle Δt est proportionnelle à Δt et le rapport $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ est égal à l'accélération constante γ du mouvement.* En effet l'équation (1) donne immédiatement, si l'on fait croître t de Δt et v de Δv,

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \gamma;$$

inversement si, dans un mouvement rectiligne, la vitesse varie proportionnellement au temps, le mouvement est uniformément varié ; en effet, par hypothèse, $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ est constant, la limite de ce rapport $\frac{dv}{dt}$, c'est-à-dire l'accélération, est donc constante, ce qui est la définition même du mouvement uniformément varié.

Discussion. — Un mouvement uniformément varié est à certains instants retardé et, à d'autres, accéléré. Pour le montrer considérons, suivant la règle générale, le produit

$$v\gamma = (v_0 + \gamma t)\gamma;$$

ce produit s'annule à l'instant

$$t_1 = -\frac{v_0}{\gamma},$$

où la vitesse s'annule. Il est négatif quand $t < t_1$ et positif

quand $t > t_1$; le mouvement est retardé pour $t < t_1$ et accéléré pour $t > t_1$.

Pour discuter complètement le mouvement on est ramené à discuter la variation d'un trinome du deuxième degré. Supposons, pour fixer les idées, $\gamma > 0$ et reprenons les équations

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2,$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \gamma t;$$

la variable indépendante t va toujours en croissant, la vitesse s'annule à l'instant $t_1 = -\frac{v_0}{\gamma}$; tant que $t < t_1$ la vitesse est négative, x va en décroissant, le mobile M marche dans le sens négatif; pour $t > t_1$ la vitesse est positive, x croît et le mobile marche dans le sens positif. A l'instant $t = t_1$, x prend sa valeur minimum

$$x_1 = x_0 - \frac{v_0^2}{2\gamma}$$

et le mobile occupe une position O_1, qui est la plus à gauche de toutes les positions qu'il peut prendre (*fig.* 18). En résumé

Fig. 18.

O O_1 M x

quand γ est positif, t variant de $-\infty$ à $+\infty$, le mobile vient de l'infini à droite jusqu'au point O_1, qu'il atteint pour $t = t_1$, puis retourne de O_1, à l'infini à droite; dans la première phase le mouvement est retardé, dans la deuxième il est accéléré.

Si l'on prend un point déterminé M d'abscisse x plus grande que x_1, le mobile passe deux fois en M, une fois en marchant vers O_1, et une fois en s'en éloignant; il est à remarquer que les deux vitesses correspondantes sont égales et de signes contraires. C'est ce que l'on voit immédiatement en

exprimant v en fonction de x. En élevant l'expression de v au carré on peut écrire

$$v^2 = v_0^2 + 2\gamma\left(v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2\right),$$

c'est-à-dire, d'après l'expression de x,

$$v^2 = v_0^2 + 2\gamma(x - x_0).$$

Cette formule donne pour v des valeurs réelles, à condition que

$$x > x_0 - \frac{v_0^2}{2\gamma}, \qquad x > x_1,$$

condition vérifiée; les deux valeurs de v sont d'ailleurs égales et de signes contraires.

Dans cette discussion, nous avons supposé γ positif; on traiterait de même le cas de γ négatif.

Forme réduite de l'équation. — Remarquons, d'une manière générale, que l'on peut toujours chercher à simplifier l'équation d'un mouvement rectiligne en choisissant convenablement l'origine des temps et l'origine des espaces. Actuellement, prenons comme origine des temps l'instant où la vitesse s'annule et comme origine des espaces la position correspondante du mobile. Dans ces conditions la vitesse v_0, correspondant à $t = 0$, est nulle et l'abscisse correspondante x_0 est nulle. Les équations donnant x et v prennent alors les formes réduites

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2, \qquad v = \gamma t.$$

Avec ce choix d'origines on a deux formules correspondant à des énoncés très simples qui résument les lois de la chute libre des corps sans vitesse initiale et dans le vide :

1° *Les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir;*

2° *Les vitesses sont proportionnelles aux temps employés à les acquérir.*

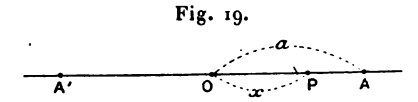
13. Mouvement vibratoire simple. — Considérons un mouvement rectiligne dont l'équation est

$$x = a \sin(\omega t + \delta),$$

a, ω et δ étant des constantes; c'est un mouvement périodique, puisque le mobile repasse aux mêmes points à des intervalles de temps égaux; en effet, si nous augmentons t de $\frac{2\pi}{\omega}$, l'arc $\omega t + \delta$ augmente de 2π; les sinus de deux arcs qui diffèrent de 2π étant égaux, x reprend la même valeur.

Soit O l'origine des espaces (*fig.* 19); prenons comme

Fig. 19.



origine des temps l'instant où le mobile est au point A' d'abscisse $-a$; on aura, pour $t=0$, $x=-a$; on aura donc

$$-1 = \sin\delta$$

et par suite

$$\delta = -\frac{\pi}{2}.$$

L'équation du mouvement s'écrit alors

$$x = a \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -a \cos\omega t.$$

Les points A et A' correspondent aux positions extrêmes $+a$ et $-a$ du mobile qui dans son mouvement vibratoire oscille autour du point O.

Appelons T le temps d'une *oscillation double ou complète,* c'est-à-dire le temps que le mobile met à aller de A' en A et à faire retour en A', T sera ce qu'on appelle la *période;* elle

est caractérisée par ce fait qu'au bout du temps T le mobile reprend et la même position et la même vitesse; on voit d'autre part que x sera nul lorsqu'on aura $t = \frac{T}{4}$ et par suite

$$o = -a \cos \omega \frac{T}{4}.$$

d'où

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

et par suite

$$x = -a \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

La période T est l'inverse du nombre N des vibrations à la seconde $T = \frac{1}{N}$.

Dans l'étude des mouvements vibratoires x prend le nom d'*élongation*.

On déduit de l'équation du mouvement, sous cette forme, les expressions de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps

$$v = \frac{dx}{dt} = a \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi t}{T} = a\omega \sin \omega t.$$

$$\gamma = \frac{dv}{dx} = a \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cos \frac{2\pi t}{T} = a\omega^2 \cos \omega t.$$

a s'appelle l'*amplitude* du mouvement vibratoire.

$a\omega$ est la *vitesse maximum* que prend le mobile au temps $\frac{T}{4}$ au passage au point O; l'arc ωt a reçu le nom de *phase de vibration*.

La vitesse et l'accélération sont comme l'élongation représentées par des fonctions sinusoïdales du temps; le produit de ces quantités étant alternativement positif et négatif, le mouvement est alternativement accéléré et retardé.

La discussion de ces équations peut se résumer dans le

Tableau suivant :

$t = 0$,	$x = -a$,	$v = 0$,	$\gamma = +a\omega^2$.
$t = \frac{T}{4}$,	$x = 0$,	$v = +a\omega$,	$\gamma = 0$.
$t = \frac{T}{2}$,	$x = +a$,	$v = 0$,	$\gamma = -a\omega^2$.
$t = \frac{3T}{4}$,	$x = 0$,	$v = -a\omega$,	$\gamma = 0$.
$t = T$,	$x = -a$,	$v = 0$,	$\gamma = +a\omega^2$.

De T à 2T, x, v et γ repasseraient par les mêmes valeurs et ainsi de suite.

De A′ en O, le mouvement est accéléré; il est retardé de O en A, puisque, la vitesse étant positive, l'accélération est négative; de A en O, le mouvement est accéléré, la vitesse et l'accélération étant à la fois négatives; enfin, de O en A′, le mouvement est retardé, la vitesse est dans cet intervalle négative, alors que l'accélération est positive.

On appelle aussi *fréquence* F le nombre N des oscillations complètes à la seconde; c'est, par conséquent, l'inverse de la période

$$F = \frac{1}{T} = N.$$

Expressions de la vitesse et de l'accélération en fonction de l'élongation. — Dans le mouvement oscillatoire que nous venons d'étudier, le mobile passe une infinité de fois par une même position M d'abscisse x, comprise entre $-a$ et $+a$. Il y passe toujours avec la même vitesse en valeur absolue. En effet, en éliminant t entre les expressions de x et de v, on a immédiatement

$$\frac{v^2}{\omega^2} + x^2 = a^2, \qquad v = \pm\,\omega\sqrt{a^2 - x^2},$$

d'où, pour chaque valeur de x, deux valeurs de v égales et de

signes contraires, l'une correspondant au cas où le mobile passe en M en marchant dans un sens, et l'autre au cas où il passe en M en marchant en sens contraire. Quant à l'accélération, elle est dirigée vers le centre de vibration O et varie proportionnellement à la distance du mobile à ce centre; on a en effet

$$\gamma = -\omega^2 x,$$

γ est donc de signe contraire à x et proportionnel à x.

Formule générale. — Si l'on avait pris un cosinus au lieu d'un sinus

$$x = a\cos(\omega t + \delta),$$

on aurait eu un mouvement identique, avec les mêmes conclusions, sauf un changement dans l'origine des temps; on peut en effet écrire cette dernière équation

$$x = a\sin\left[\omega\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right) + \delta\right].$$

ou, en comptant le temps à partir de l'instant $-\frac{\pi}{2\omega}$,

$$x = a\sin(\omega t + \delta).$$

Il est évident qu'un mouvement défini par une équation de la forme

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$

où A et B sont constants, rentre dans le précédent; car, en déterminant deux constantes a et δ par les équations

$$A = a\cos\delta, \qquad B = -a\sin\delta,$$

on a

$$x = a\cos(\omega t + \delta).$$

14. Mouvement représenté par un sinus ou un cosinus hyperbolique; loi de son accélération. — On sait que,

par définition, on appelle *sinus* ou *cosinus hyperbolique* d'une variable α les deux fonctions

$$\operatorname{sh}\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}, \qquad \operatorname{ch}\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}.$$

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes qui font ressortir l'analogie de ces fonctions avec les fonctions circulaires $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$,

$$\operatorname{ch}(-\alpha) = \operatorname{ch}\alpha, \qquad \operatorname{sh}(-\alpha) = -\operatorname{sh}\alpha,$$

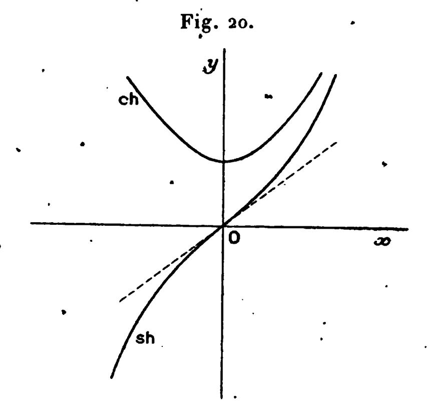
$$\operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{sh}^2\alpha = 1,$$

$$\frac{d\operatorname{ch}\alpha}{d\alpha} = \operatorname{sh}\alpha, \qquad \frac{d\operatorname{sh}\alpha}{d\alpha} = \operatorname{ch}\alpha,$$

$$\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha = e^{\alpha}, \qquad \operatorname{ch}\alpha - \operatorname{sh}\alpha = e^{-\alpha}.$$

Quand α varie de 0 à $+\infty$ la fonction $\operatorname{ch}\alpha$ croît constamment de 1 à $+\infty$, et la fonction $\operatorname{sh}\alpha$ croît constamment de 0

Fig. 20.



à $+\infty$. Quand α varie de $-\infty$ à 0, $\operatorname{ch}\alpha$ décroît de $+\infty$ à 1 et $\operatorname{sh}\alpha$ croît de $-\infty$ à 0.

Les courbes représentatives des fonctions

$$y = \operatorname{ch}x, \qquad y = \operatorname{sh}x$$

ont la forme indiquée sur la *fig.* 20. Les deux courbes sont

asymptotes l'une à l'autre à droite et tendent à devenir symétriques l'une de l'autre quand on s'éloigne à l'infini vers la gauche.

1° Cela posé, prenons d'abord le mouvement défini par un cosinus hyperbolique

$$x = a\,\mathrm{ch}(\omega t + \delta),$$

a, ω et δ étant des constantes dont nous supposerons les deux premières positives.

Comme un cosinus hyperbolique a pour minimum $+1$, x est toujours supérieur à a, sauf à l'instant

$$t_1 = -\frac{\delta}{\omega},$$

où x devient égal à a.

Soit A le point d'abscisse a (*fig.* 21). Écrivons l'équation

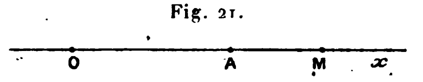
$$x = a\,\mathrm{ch}\,\omega(t - t_1),$$

on en déduit pour la vitesse, en prenant la dérivée,

$$v = a\omega\,\mathrm{sh}\,\omega(t - t_1).$$

Quand $t < t_1$, $v < 0$, le mobile placé en M à droite de A

Fig. 21.



marche vers A avec une vitesse décroissante en valeur absolue (mouvement retardé); pour $t = t_1$ le mobile est arrivé en A avec une vitesse nulle; pour $t > t_1$, $v > 0$, le mobile s'éloigne vers la droite et quand t augmente indéfiniment il s'éloigne indéfiniment, avec une vitesse indéfiniment croissante (mouvement accéléré).

Pour terminer, exprimons comme dans la question précédente la vitesse et l'accélération en fonction de x. D'abord, en

éliminant t entre les expressions de x et de v, on a

$$x^2 - \frac{v^2}{\omega^2} = a^2, \qquad v = \pm \omega\sqrt{x^2 - a^2};$$

quand x est supérieur à a, cette formule donne pour v deux valeurs égales et de signes contraires correspondant, l'une à l'aller, l'autre au retour.

L'accélération est

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = a\omega^2 \operatorname{ch}\omega(t - t_1),$$

$$\gamma = \omega^2 x;$$

elle est dirigée dans le sens OM et est proportionnelle à la distance OM.

2° Prenons maintenant un mouvement défini par un sinus hyperbolique

$$x = a \operatorname{sh}(\omega t + \delta),$$

où nous supposerons encore a et ω positifs. Dans ce mouvement, x s'annule à l'instant

$$t_1 = -\frac{\delta}{\omega};$$

donc, à cet instant, le mobile passe en O. Écrivons l'équation

$$x = a \operatorname{sh}\omega(t - t_1),$$

nous avons pour la vitesse

$$v = a\omega \operatorname{ch}\omega(t - t_1).$$

Cette vitesse est positive et a pour minimum la valeur $a\omega$ qu'elle atteint pour $t = t_1$ au moment où le mobile est en O. Le mobile marche dans le même sens de l'infini à gauche à l'infini à droite avec une vitesse d'abord décroissante jusqu'à O (mouvement retardé), puis croissante du point O à l'infini (mouvement accéléré).

En fonction de x, la vitesse est ici

$$v = \omega\sqrt{a^2 + x^2},$$

l'accélération est

$$\gamma = a\omega^2 \operatorname{sh}\omega(t - t_1),$$
$$\gamma = \omega^2 x;$$

l'accélération est encore dirigée dans le sens OM et est proportionnelle à la distance OM.

3° Les deux mouvements précédents peuvent être regardés comme des cas particuliers du mouvement défini par une équation de la forme

$$x = \text{A} \operatorname{ch}\omega t + \text{B} \operatorname{sh}\omega t,$$

A et B désignant des constantes, ou en faisant

$$\frac{\text{A} + \text{B}}{2} = \lambda, \qquad \frac{\text{A} - \text{B}}{2} = \mu,$$
$$x = \lambda e^{\omega t} + \mu e^{-\omega t},$$

λ et μ étant deux nouvelles constantes.

Deux cas principaux sont à distinguer suivant le signe du produit $\lambda\mu$.

Si λ et μ sont de mêmes signes on peut déterminer deux constantes a et δ par les relations

$$\lambda = \frac{a}{2}e^{\delta}, \qquad \mu = \frac{a}{2}e^{-\delta}$$

qui donnent

$$a = 2\sqrt{\lambda\mu}, \qquad 2\delta = \text{Log}\,\frac{\lambda}{\mu};$$

l'équation du mouvement devient alors

$$x = a \operatorname{ch}(\omega t + \delta).$$

Si λ et μ sont de signes contraires, on pourra déterminer

a et δ par les équations

$$\lambda = \frac{a}{2} e^{\delta}, \qquad \mu = -\frac{a}{2} e^{-\delta},$$

$$a = 2\sqrt{-\lambda\mu}, \qquad 2\delta = \mathrm{Log}\left(-\frac{\lambda}{\mu}\right);$$

l'équation du mouvement est alors

$$x = a\,\mathrm{sh}(\omega t + \delta).$$

Enfin il pourrait arriver que λ ou μ fût nul. Si $\lambda = 0$, on a le mouvement

$$x = \mu e^{-\omega t}$$

qui présente cette circonstance particulière que, t variant de $-\infty$ à $+\infty$, le mobile s'avance constamment vers le point O, dont il s'approche autant qu'on le veut sans jamais y arriver. En même temps, sa vitesse $v = -\mu\omega e^{-\omega t} = -\omega x$ tend vers zéro.

Pour $\mu = 0$ on a

$$x = \lambda e^{\omega t};$$

quand t est négatif et très grand, le mobile est très voisin de l'origine et sa vitesse $v = \lambda\omega e^{\omega t} = \omega x$ est très petite; t augmentant, le mobile s'éloigne de plus en plus avec une vitesse croissante.

Dans tous ces mouvements l'accélération est

$$\gamma = \omega^2 x.$$

15. Composition de plusieurs mouvements rectilignes dirigés suivant la même droite.

A. **Deux mouvements uniformes.** — Supposons une droite Ox sur laquelle se meut d'un mouvement uniforme, avec une vitesse constante v, un mobile M; il parcourra dans le temps Δt un espace $MM' = v\,\Delta t$; mais imaginons que,

en même temps, la droite Ox glisse (*fig.* 22) sur la droite XX′ d'un mouvement uniforme de vitesse v', tel qu'au bout du temps Δt le point M′ de cette droite occupe la position M″

Fig. 22.

X′ X
O M M′ M″ x

définie par $M'M'' = v'\Delta t$. Le mobile sera, en réalité, en M″ et dans le temps Δt il aura parcouru

$$MM'' = MM' + M'M'' = (v + v')\,\Delta t.$$

Tout se passe donc comme s'il n'y avait qu'un seul mouvement, dont la vitesse constante serait définie par

$$V = v + v'.$$

B. **Deux mouvements variés** : 1° *Composition des vitesses.* — Supposons que les déplacements précédents MM′ et M′M″ aient été effectués d'un mouvement varié; l'espace parcouru pendant le temps Δt sera toujours MM″ tel que l'on ait

$$MM'' = MM' + M'M''.$$

Divisons tous les termes de cette égalité par Δt

$$\frac{MM''}{\Delta t} = \frac{MM'}{\Delta t} + \frac{M'M''}{\Delta t};$$

par définition les termes de cette égalité expriment les vitesses moyennes des mobiles qui iraient de M en M″, de M en M′ et de M′ en M″ dans le temps Δt. En passant à la limite, c'est-à-dire en faisant tendre Δt vers zéro, ces vitesses moyennes deviennent la vitesse V au temps t du mouvement résultant et les vitesses v et v' des mouvements composants

$$V = v + v'. \tag{1}$$

Donc, d'une façon générale : *quand on compose deux mouvements rectilignes quelconques, suivant la même*

droite, la vitesse résultante est la somme algébrique des deux vitesses des mouvements que l'on compose.

2° *Composition des accélérations.* — Elle résulte immédiatement de celle des vitesses, puisque, à chaque instant, l'égalité (1) est satisfaite; dérivons tous ses termes par rapport à t : nous aurons

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dv}{dt} + \frac{dv'}{dt};$$

ces expressions sont l'accélération Γ au temps t du mouvement résultant et les accélérations γ et γ' des mouvements composants; donc

$$\Gamma = \gamma + \gamma'.$$

Quand on compose deux mouvements rectilignes quelconques, suivant la même droite, l'accélération du mouvement résultant est la somme algébrique des deux accélérations des mouvements que l'on compose.

Il est évident, d'après cela, que ces deux théorèmes peuvent être étendus à un nombre quelconque de mouvements rectilignes dirigés suivant la même droite.

16. Composition de deux mouvements vibratoires parallèles et de même période.

Considérons en un même point et au même instant deux mouvements vibratoires parallèles caractérisés par une même période T, mais présentant une différence de phase, et prenons la phase du premier comme origine des phases; les équations de ces mouvements seront, par exemple, de la forme

$$x_1 = a_1 \sin \frac{2\pi t}{T},$$

$$x_2 = a_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right);$$

les élongations s'ajoutent algébriquement et l'élongation X

du mouvement résultant est

$$X = x_1 + x_2 = a_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + a_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right)$$

ou, en développant,

$$(1) \qquad X = a_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + a_2 \sin \frac{2\pi t}{T} \cos\alpha + a_2 \cos \frac{2\pi t}{T} \sin\alpha.$$

Cherchons à mettre cette équation sous la forme

$$(2) \qquad X = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right),$$

c'est-à-dire à représenter la somme des élongations des deux mouvements vibratoires superposés par une élongation unique de même période, mais de phase différente; développons, il vient

$$(2') \qquad X = A \sin \frac{2\pi t}{T} \cos\delta + A \cos \frac{2\pi t}{T} \sin\delta$$

et en identifiant les équations (1) et (2′)

$$A \cos\delta = a_1 + a_2 \cos\alpha,$$
$$A \sin\delta = a_2 \sin\alpha;$$

en ajoutant membre à membre, après avoir élevé au carré, on a

$$(3) \qquad A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\alpha$$

et en divisant membre à membre

$$(4) \qquad \operatorname{tang} \delta = \frac{a_2 \sin\alpha}{a_1 + a_2 \cos\alpha};$$

la première de ces équations fait connaître l'amplitude du mouvement vibratoire résultant, la seconde donne la quantité δ qui définit sa phase.

La valeur de A est toujours réelle, car le minimum de $\cos\alpha$

est -1 et dans ce cas l'expression de A est le carré de $(a_1 - a_2)$; l'équation (4), de même, donne toujours une valeur réelle pour δ.

On peut faire, au sujet des vitesses ou des accélérations qui sont aussi sinusoïdales, des calculs semblables et qui conduisent à des conclusions analogues.

Si $\cos\alpha = 1$, c'est-à-dire si $\alpha = 0$ ou $2n\pi$, ce qui veut dire que la différence des phases du second mouvement vibratoire par rapport au premier est nulle, ou égale à un nombre pair de fois π, on a

$$A = a_1 + a_2;$$

les amplitudes s'ajoutent; si, au contraire, $\cos\alpha = -1$, ce qui arrive lorsqu'on a $\alpha = (2n+1)\pi$, on voit que

$$A = a_1 - a_2,$$

et si les amplitudes des deux mouvements superposés sont égales, A devient nul, l'amplitude du mouvement vibratoire résultant s'annule, il y a extinction du mouvement vibratoire, phénomène auquel on donne le nom d'*interférence*.

17. **Composition de n vibrations parallèles de même période.** — Imaginons qu'en un même point se superposent n vibrations parallèles différant par l'amplitude et par la phase, mais de même période, et soient

$$x_1 = a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha_1\right),$$

$$x_2 = a_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha_2\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_n = a_n \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha_n\right),$$

les équations de ces n mouvements.

L'équation du mouvement résultant est

$$X = \Sigma x_1 = \sin\frac{2\pi t}{T}\Sigma a_1 \cos\alpha_1 + \cos\frac{2\pi t}{T}\Sigma a_1 \sin\alpha_1;$$

elle peut se mettre sous la forme

$$X = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right).$$

On a en effet, en développant et en identifiant,

$$A\cos 2\pi\delta = \Sigma a_1 \cos\alpha_1,$$
$$A\sin 2\pi\delta = \Sigma a_1 \sin\alpha_1;$$

d'où l'on déduit

$$A^2 = (\Sigma a_1 \cos\alpha_1)^2 + (\Sigma a_1 \sin\alpha_1)^2,$$
$$\operatorname{tang} 2\pi\delta = \frac{\Sigma a_1 \sin\alpha_1}{\Sigma a_1 \cos\alpha_1}.$$

Les valeurs de A et de δ sont toujours réelles; le mouvement résultant est donc un mouvement vibratoire de même période; il serait facile d'écrire les équations analogues qui feraient connaître la vitesse et l'accélération.

18. Composition de deux vibrations parallèles de périodes inégales. — Soient deux mouvements vibratoires de périodes inégales et n'ayant ni la même amplitude ni la même phase; leurs élongations peuvent être représentées par

$$x_1 = a_1 \sin\frac{2\pi t}{T},$$
$$x_2 = a_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{T'} + \delta\right).$$

Posons

$$\frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{T} + \varepsilon,$$

la seconde expression peut s'écrire

$$x_2 = a_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varepsilon t + \delta\right).$$

Le calcul sera conduit exactement comme dans les cas précédents à condition de remplacer δ par $\varepsilon t + \delta$; on aura

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varepsilon t + \delta).$$

L'amplitude sera donc fonction du temps; elle passera par des maxima et des minima correspondant aux valeurs $+1$ et -1 du cosinus. On aura pour $\varepsilon t + \delta = 2n\pi$ des maxima $A^2 = (a_1 + a_2)^2$, et pour $(\varepsilon t + \delta) = (2n+1)\pi$ des minima $A^2 = (a_1 - a_2)^2$ qui pourront même être nuls si $a_1 = a_2$.

Ces maxima et ces minima se suivront à des intervalles réguliers; soit θ le temps qui sépare deux maxima; deux maxima qui se suivent sont caractérisés par

$$\varepsilon t + \delta = 2n\pi,$$
$$\varepsilon(t + \theta) + \delta = 2(n+1)\pi,$$

d'où, en retranchant

$$\varepsilon\theta = 2\pi$$

et en remplaçant ε par son expression, il vient

$$\theta = \frac{2\pi}{\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}} = \frac{TT'}{T - T'};$$

en remplaçant T et T' par les inverses $\frac{1}{N}$, $\frac{1}{N'}$ des nombres des vibrations à la seconde correspondant à chaque mouvement vibratoire on obtient

$$\theta = \frac{1}{N' - N},$$

le nombre n des maxima à la seconde est donc

$$n = \frac{1}{\theta} = N' - N.$$

Le nombre de maxima à la seconde produits par deux

mouvements vibratoires de périodes inégales est égal à la différence du nombre de leurs vibrations à la seconde.

19. Mouvement périodiquement uniforme. — Le mouvement périodiquement uniforme est celui qu'on obtient lorsqu'on compose un mouvement vibratoire simple avec un mouvement rectiligne uniforme sur la droite sur laquelle s'exécute la vibration. cf. p. 61

Soit

$$x' = x_0 + v_0 t$$

l'équation du mouvement uniforme, où v_0 est une constante, et soit

$$x'' = a \sin(\omega t + \delta)$$

l'équation du mouvement vibratoire.

L'équation du mouvement résultant sera, d'après les théorèmes précédents

$$(1) \qquad x = x' + x'' = x_0 + v_0 t + a \sin(\omega t + \delta);$$

la vitesse sera donnée par la formule

$$(2) \qquad \mathrm{V} = \frac{dx}{dt} = v_0 + a\omega \cos(\omega t + \delta)$$

et l'accélération sera

$$(3) \qquad \gamma = \frac{d\mathrm{V}}{dt} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \delta).$$

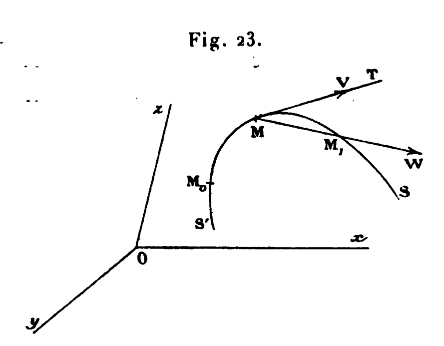
B. — MOUVEMENT CURVILIGNE.

20. Mouvement curviligne sur une trajectoire donnée.

Vitesse. — Soient M et M_1 les positions du mobile sur la trajectoire aux instants t et $t + \Delta t$. Portons sur MM_1, dans

le sens MM_1, une longueur MW égale à $\frac{\text{corde } MM_1}{\Delta t}$ (*fig.* 23); le vecteur MW s'appelle *vitesse moyenne* du mobile pendant le temps Δt; c'est la vitesse que posséderait un mobile fictif animé d'un mouvement rectiligne uniforme qui parcourrait le segment de droite MM_1 dans le temps Δt. Lorsque Δt tend vers zéro, la vitesse moyenne MW tend vers un vecteur limite MV, tangent à la trajectoire en M, que l'on appelle *vitesse du mobile à l'instant t,* et qui représente cette vitesse en grandeur, direction et sens.

Fig. 23.



Supposons le mouvement défini par la trajectoire et par l'expression de l'arc $M_0M = s$ en fonction de t. Comme le rapport de l'arc MM_1 à la corde MM_1 tend vers l'unité quand Δt tend vers zéro, la vitesse a pour valeur absolue

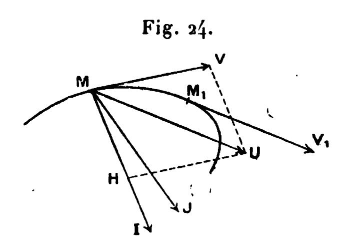
$$\lim \frac{\text{arc } MM_1}{\Delta t} = \pm \frac{ds}{dt}.$$

Si l'on mène la tangente à la trajectoire MT dans le sens des arcs positifs, la vitesse est dirigée dans le sens MT, ou en sens contraire, suivant que $\frac{ds}{dt}$ est positif ou négatif. Donc la valeur algébrique v de la vitesse estimée positivement dans le sens MT est $\frac{ds}{dt}$. Quand cette vitesse v est constante en grandeur et signe, on dit que le mouvement curviligne est *uniforme*.

Accélération. — La conception de l'accélération dans les cas les plus simples appartient à Galilée.

Soient MV, M_1V_1 les vitesses du mobile aux instants t et $t + \Delta t$ (*fig.* 24). Menons par M un vecteur MU égal et parallèle à M_1V_1 et soit MH la différence géométrique entre MU et MV, c'est-à-dire la grandeur géométrique qu'il faut composer avec MV pour obtenir MU. Si l'on porte sur MH une longueur MI égale à $\frac{MH}{\Delta t}$, le vecteur MI est l'*accélération moyenne* du mobile pendant le temps Δt. Quand Δt tend vers zéro, ce vecteur MI tend vers une limite MJ, qu'on nomme *accélération du mobile à l'instant t.*

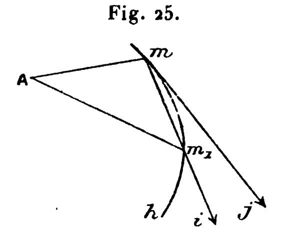
Fig. 24.

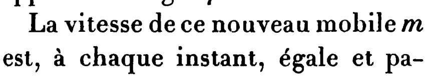


Comme le plan MVU a pour limite un plan appelé *plan osculateur en* M *à la trajectoire*, l'accélération MJ est située dans le plan osculateur.

21. Hodographe. — On ramène facilement la notion d'accélération à celle de vitesse. Un point M étant en mouvement sur une trajectoire (*fig.* 24), on mène par un point fixe arbitraire A (*fig.* 25) un vecteur Am égal et parallèle à la vitesse MV du mobile M à l'instant t. Quand t varie, le vecteur Am change et décrit une surface conique; son extrémité m constitue un nouveau mobile parcourant, sur ce cône, une trajectoire curviligne h appelée *hodographe*.

Fig. 25.





La vitesse de ce nouveau mobile m est, à chaque instant, égale et parallèle à l'accélération du premier M. En effet, à l'instant $t + \Delta t$ le mobile m occupe une position m_1, telle que Am_1 soit égal et parallèle à M_1V_1 ou à MU : par conséquent mm_1 est égal et parallèle à VU ou à MH. La vitesse moyenne du point m

sur l'hodographe pendant l'intervalle Δt est un vecteur mi dirigé suivant mm_1 et égal à $\frac{mm_1}{\Delta t}$: cette vitesse moyenne mi est donc égale et parallèle à l'accélération moyenne MI du premier mobile M. En faisant tendre Δt vers zéro, le plan Amm_1 tend vers le plan tangent à la surface conique suivant Am, plan qui est parallèle au plan osculateur à la trajectoire au point M, et l'on voit que la vitesse mj du mobile m à l'instant t est égale à l'accélération MJ du mobile M au même instant.

22. Dérivées géométriques. — Leur application à la définition de la vitesse et de l'accélération. — Soit un vecteur OM dont l'origine O est fixe (*fig.* 26) et dont l'extrémité M est animée d'un mouvement déterminé de façon à décrire une certaine trajectoire; à l'instant t le vecteur a une position OM, à l'instant $t + \Delta t$ une position OM_1. L'accroissement géométrique du vecteur est la *différence géométrique*

Fig. 26.

$$(OM_1) - (OM),$$

c'est-à-dire un vecteur égal à MM_1. Le rapport de cet accroissement à l'accroissement du temps est le vecteur MB

$$MB = \frac{MM_1}{\Delta t},$$

ayant même direction et même sens que MM_1.

Quand Δt tend vers zéro, ce vecteur MB tend vers un vecteur limite MD tangent à la trajectoire qu'on appelle *dérivée géométrique du vecteur* OM.

D'après cela, *la dérivée géométrique d'un vecteur variable, d'origine fixe, est la limite du rapport de l'accroissement géométrique du vecteur à l'accroissement Δt du temps, quand Δt tend vers zéro.*

On voit alors immédiatement, d'après la définition même de la vitesse moyenne et de la vitesse, que : *la vitesse d'un point* M *est la dérivée géométrique d'un vecteur issu d'un point fixe quelconque et allant au mobile.*

On voit de même, d'après la définition de l'accélération à l'aide de l'hodographe, que : *l'accélération d'un mobile* M, *à un instant quelconque, est égale à la dérivée géométrique d'un vecteur* A*m, d'origine fixe* A (*fig.* 25), *égal à la vitesse* MV *du mobile.*

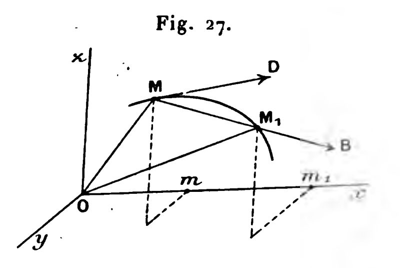
L'accélération apparaît alors comme étant la vitesse avec laquelle varie le vecteur vitesse.

23. Projection de la dérivée géométrique d'un vecteur sur un axe. — Soit un vecteur OM d'origine fixe O : considérons les projections de ce vecteur sur un axe fixe, les projections étant faites par des plans parallèles à un plan fixe. On peut toujours supposer que l'axe passe par O, car les projections d'un vecteur sur des axes parallèles sont égales.

Soit alors Ox l'axe sur lequel on projette, les projections étant faites parallèlement au plan yOz.

La projection Om du vecteur n'est autre chose que l'abscisse x du point M dans le système d'axes obliques ou rectangulaires Ox, Oy, Oz. A l'instant $t + \Delta t$ le vecteur occupe une position OM_1 (*fig.* 27) ayant pour projection $x + \Delta x$; le vecteur MM_1, différence géométrique de OM_1 et OM, a pour projection la différence des projections de OM_1 et de OM, c'est-à-dire $(x + \Delta x) - x = \Delta x$. Le vecteur $MB = \frac{MM_1}{\Delta t}$ étant égal au vecteur MM_1 divisé par Δt a pour

Fig. 27.



projection la projection de MM_1 divisée par Δt, c'est-à-dire $\frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Enfin, en supposant que Δt tende vers zéro, le vecteur MB tend vers la dérivée géométrique MD de OM et sa projection tend vers la limite $\frac{dx}{dt}$ ou x'_t, qui est la projection de la dérivée géométrique MD.

En résumé : *la projection de la dérivée géométrique d'un vecteur, d'origine fixe, sur un axe, est égale à la dérivée de la projection du vecteur sur cet axe.*

24. Projection orthogonale de la dérivée géométrique d'un vecteur sur le vecteur lui-même. — Appelons r la longueur OM du vecteur d'origine fixe O; quand le temps varie, le vecteur change de longueur et de direction, r est une certaine fonction du temps. Prenons sur le vecteur OM, à l'instant t, comme sens positif, le sens OM; alors *la projection orthogonale de la dérivée géométrique de* OM *sur* OM *est égale à* $\frac{dr}{dt}$ *ou* r'_t.

On peut déduire ce théorème du précédent. Prenons un axe fixe quelconque Ox et projetons orthogonalement le vecteur OM sur cet axe. En appelant (*fig.* 28) r la longueur OM et θ l'angle xOM, on a

Fig. 28.

$$x = r\cos\theta.$$

Les quantités r et θ varient en fonction du temps.

La projection de la dérivée géométrique MD de OM sur Ox est

$$D_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{ou} \quad D_x = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Cette formule est vraie quel que soit le choix de l'axe Ox; dès lors, pour avoir la projection D_r de MD sur OM, prenons pour axe fixe Ox la position OM du vecteur à l'instant t. Nous aurons

$$\theta = 0$$

et par suite

$$D_r = \frac{dr}{dt}.$$

25. **Applications : Premier problème.** — *Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée géométrique* D *d'un vecteur* OM *soit constamment dirigée suivant ce vecteur.* — Nous allons montrer que cette condition est que *l'orientation du vecteur soit constante.*

En effet, actuellement, le vecteur *dérivé* se confond avec sa projection sur OM. Le segment MD, estimé positivement dans le sens OM, est donc $\frac{dr}{dt}$ en appelant r la longueur OM. La projection de ce segment sur un axe fixe quelconque Ox est

$$D_x = \frac{dr}{dt} \cos\theta,$$

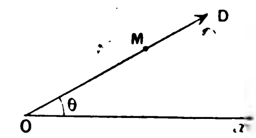
θ étant l'angle xOM. Mais, comme la projection x de OM sur Ox est

$$x = r\cos\theta,$$

on a aussi

$$D_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Fig. 29.



Comparant ces deux formules, on voit que $r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$ est nul; comme r et θ sont différents de zéro, $\frac{d\theta}{dt}$ est nul, et θ est constant.

L'angle de OM avec un axe fixe Ox (*fig.* 29) pris arbi-

trairement étant constant, OM a une orientation fixe dans l'espace. Cette condition nécessaire est évidemment suffisante.

On peut se rendre compte, approximativement, de cette condition en remarquant que, si l'orientation du vecteur change, comme dans la *fig*. 27, la dérivée MD du vecteur fait avec le vecteur un angle qui est différent de zéro comme étant l'angle de la tangente MD à la trajectoire de M avec OM.

Deuxième problème. — *Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée géométrique d'un vecteur soit constamment normale à ce vecteur?* — Cette condition est que *la longueur r du vecteur reste constante*. En effet, si le vecteur dérivé D est constamment perpendiculaire sur OM, sa projection sur OM est constamment nulle; or cette projection est $\frac{dr}{dt}$. On a donc

$$\frac{dr}{dt} = 0, \qquad r = \text{const.}$$

Réciproquement, si r est constante, $\frac{dr}{dt}$ est nul et le vecteur D est perpendiculaire sur OM.

On peut se rendre compte approximativement de ce résultat en remarquant que, si r varie, la tangente à la trajectoire de M est oblique sur OM; si, au contraire, r est constant, le point M décrit une courbe située sur une sphère de centre O et la tangente MD à cette courbe est perpendiculaire au rayon OM.

Troisième problème. — *Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée géométrique d'un vecteur soit nulle?* — Il faut et il suffit que ce vecteur soit *constant en grandeur, direction et sens*.

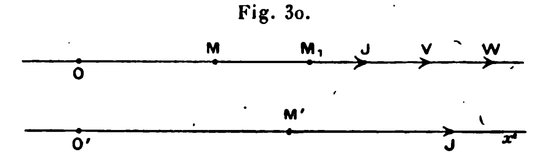
En effet, si la dérivée géométrique est nulle, sa projection

sur un axe Ox quelconque est nulle. Or cette projection est $\frac{dx}{dt}$, x désignant la projection du vecteur sur l'axe ; donc x est constant ; cette propriété ayant lieu pour un axe quelconque, l'extrémité M du vecteur est fixe.

On peut dire aussi que, la vitesse de l'extrémité M du vecteur étant nulle, cette extrémité est fixe.

26. Hodographe d'un mouvement rectiligne varié. — Soit un mobile M parcourant l'axe Ox d'un mouvement varié et possédant à l'instant t la vitesse représentée par le vecteur MV (*fig.* 30) ; pour tracer l'hodographe de ce mouvement, prenons une origine fixe O′ et menons, à partir de cette origine, un segment O′M′ égal et parallèle à MV. Quand t

Fig. 30.



varie, la vitesse du mobile M change de grandeur, mais non de direction ; les points M′, que l'on obtient par la construction de l'hodographe, se trouvent donc tous sur la droite $O'x'$ parallèle à Ox, et l'abscisse x' du point M′ sur cet axe est par construction égale à la vitesse du point M.

Si la vitesse du point M était constante, le point M′ de l'hodographe serait immobile ; la vitesse du point M étant variable avec t, le point M′ se déplace lui-même avec une vitesse qui est l'accélération du mouvement du point M.

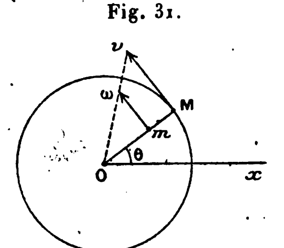
Il est facile de constater que, dans cette application de l'hodographe à l'étude du mouvement rectiligne varié, nous avons reproduit les termes mêmes du n° 11, où nous avons défini l'accélération dans un tel mouvement ; l'accord est donc complet entre ce mode de représentation cinématique de l'accélération et sa définition même.

27. Mouvement circulaire varié; son équation angulaire; vitesse et accélération angulaires. — Supposons un point M assujetti à se déplacer d'un mouvement varié sur une circonférence de rayon R (*fig.* 31). Sa position M dans le plan à chaque instant sera définie par sa distance constante $\rho = R$ à l'origine O et par l'angle

$$(1) \qquad \theta = \varphi(t)$$

que fait avec une droite fixe Ox la droite OM, cet angle étant compté positivement dans un certain sens de rotation et négativement en sens contraire; la forme de la fonction φ est quelconque quand le mouvement circulaire est varié, et la relation (1) est l'*équation angulaire* du mouvement. Soit v la vitesse du point M à l'instant t estimée positivement dans le sens positif des angles; appelons ω la vitesse du point m situé à l'unité de distance du centre; comme tous les points du rayon OM décrivent des arcs homothétiques dans le même temps, leurs vitesses sont proportionnelles à leurs distances au centre : on a donc

Fig. 31.



$$(2) \qquad \frac{v}{R} = \frac{\omega}{1} \qquad \text{ou} \qquad v = \omega R.$$

La quantité ω prend le nom de *vitesse angulaire;* sa dérivée, par rapport au temps $\frac{d\omega}{dt}$, est l'*accélération angulaire*.

Si nous appelons θ l'angle formé par le rayon mobile avec la direction Ox à l'instant t et $\theta + \Delta\theta$ l'angle à l'instant $t + \Delta t$, la vitesse ω du mobile sur la circonférence de rayon *un* à l'instant t est, en grandeur et signe, la limite $\frac{d\theta}{dt}$ du rap-

port $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$; on a donc

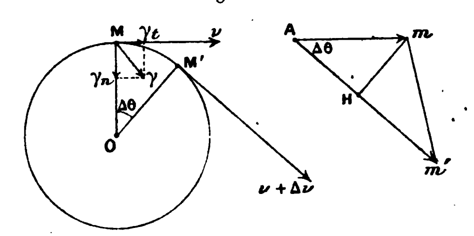
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \varphi'(t).$$

Dans le cas du mouvement uniforme, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ est une constante; le point M décrit alors des arcs égaux en des temps égaux, sa vitesse v est constante en grandeur et signe et son accélération angulaire est nulle; l'équation angulaire d'un tel mouvement est

$$\theta = \omega t.$$

28. Hodographe du mouvement circulaire varié; accélérations tangentielle et normale. — Soient M et M' deux positions infiniment voisines du mobile M sur la circonférence de rayon R aux époques t et $t + \Delta t$, et soit $\Delta\theta$ l'angle des deux droites OM et OM' (*fig.* 32); par le point A

Fig. 32.



menons Am et Am' égales et parallèles à V et V + ΔV vitesses du mobile aux mêmes époques; l'accélération moyenne est $\frac{mm'}{\Delta t}$, elle tend à la limite vers la dérivée géométrique du vecteur Am. Abaissons du point m la perpendiculaire mH sur Am'; le vecteur mm' peut être considéré comme la somme géométrique des deux vecteurs mH et Hm' et, par suite, l'accélération moyenne est aussi la résultante des deux composantes $\frac{m\text{H}}{\Delta t}$ et $\frac{\text{H}m'}{\Delta t}$.

L'angle des droites Am et Am' étant le même que celui des droites OM et OM', c'est-à-dire $\Delta\theta$, on a, puisque v et $\Delta\theta$ ont le même signe,

$$\frac{m\mathrm{H}}{\Delta t} = \frac{v \sin \Delta\theta}{\Delta t} = v \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta}.$$

Cette composante que nous appellerons γ_n est, à la limite, dirigée suivant la normale à la vitesse, c'est-à-dire suivant le rayon, et elle a pour expression

$$\gamma_n = v \frac{d\theta}{dt} = \frac{v^2}{\mathrm{R}} = \omega^2 \mathrm{R},$$

car le rapport du sinus à l'arc tend vers l'unité.

Quant à la composante $\frac{\mathrm{H}m'}{\Delta t}$, elle tend vers la projection orthogonale de la dérivée géométrique du vecteur Am sur le vecteur lui-même; elle est donc (n° 24) dirigée suivant la tangente, et est en valeur absolue égale à la valeur absolue de la dérivée de la grandeur Am de la vitesse par rapport au temps; la valeur algébrique γ_t de cette limite estimée positivement dans le sens positif des angles est dans tous les cas, en grandeur et en signe, $\gamma_t = \frac{dv}{dt} = \mathrm{R}\frac{d\omega}{dt}$, comme nous le montrerons au n° **32**.

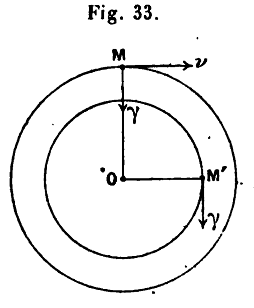
Donc *l'accélération d'un point mobile sur une circonférence se compose d'une accélération tangentielle égale à la dérivée de la vitesse par rapport au temps ou au produit de l'accélération angulaire par le rayon, et d'une accélération normale, dirigée vers le centre du cercle, égale au carré de la vitesse divisée par le rayon, ou au produit de ce rayon par le carré de la vitesse angulaire.*

29. Mouvement circulaire uniforme. — Le mobile M décrit la circonférence de rayon R avec une vitesse v con-

stante en grandeur, mais variable en direction; il y a, par conséquent, une accélération.

Appliquons la construction de l'hodographe : soit Mv la vitesse du point M, menons par le point O une droite OM′ parallèle et égale à Mv; le lieu de M′ est évidemment une circonférence de rayon v que le point M′ parcourt dans le même sens et dans le même temps que M emploie à parcourir la circonférence de rayon R (*fig.* 33).

Fig. 33.



Le rapport des vitesses v et γ des points M et M′ est le même que celui des rayons R et v; on a donc

$$\frac{\gamma}{v} = \frac{v}{R},$$

d'où

$$\gamma = \frac{v^2}{R}.$$

La vitesse γ du point M′ de l'hodographe est l'accélération du point M se déplaçant d'un mouvement uniforme sur la circonférence; figurons cette vitesse en $M'\gamma$ et menons par le point M une parallèle $M\gamma$ égale et de même sens; ce vecteur figure l'accélération du point M; elle est donc constante en grandeur et dirigée vers le centre de la circonférence suivant le rayon.

Ces conclusions peuvent d'ailleurs se déduire immédiatement du cas général; puisque v est constant, $\frac{dv}{dt}$ est nul et l'accélération tangentielle est nulle; l'accélération totale se réduit donc à sa composante centripète $\frac{v^2}{R}$ ou $\omega^2 R$.

Si l'on appelle T la durée d'une *révolution,* c'est-à-dire le temps que le mobile met à parcourir la circonférence, on a

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad v = \frac{2\pi R}{T};$$

en portant cette valeur de v dans l'expression de γ, il vient

$$\gamma = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Quand les machines, dont certaines pièces tournent, ont pris leur régime normal, on caractérise d'habitude leur mouvement par le nombre n de tours qu'elles exécutent à la *minute*.

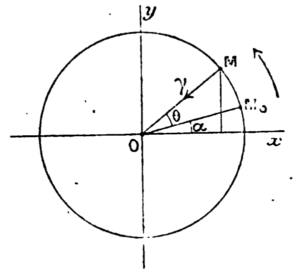
L'espace $2n\pi$ décrit par le point m sur la circonférence de rayon *un* d'un mouvement uniforme, en une minute, mesure la vitesse angulaire à la minute, et $\frac{2n\pi}{60} = \omega$ est la vitesse angulaire à la seconde; cette formule peut servir à résoudre le problème inverse.

La vitesse à la seconde d'un point situé sur la pièce qui tourne à distance R de l'axe est

$$v = \frac{2n\pi}{60} R.$$

Cette même formule peut servir à traiter le problème inverse : A combien de tours *à la minute* faut-il faire tourner un axe pour qu'un point qui lui est lié, à distance R, ait une vitesse v *à la seconde?*

Fig. 34.



30. **Projections du mouvement circulaire uniforme sur deux axes rectangulaires.** — Supposons un mobile M se déplaçant d'un mouvement uniforme, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, avec une vitesse angulaire ω sur une circonférence de rayon R (*fig.* 34); soit M_0 sa position au temps zéro définie par l'angle $M_0Ox = \alpha$, et soit M sa position au temps t définie par l'angle $MOM_0 = \theta = \omega t$; les coor-

données du point M à l'instant t, où les équations du mouvement, sont

$$x = \mathrm{R}\cos(\omega t + \alpha),$$
$$y = \mathrm{R}\sin(\omega t + \alpha).$$

On l'appelle le mouvement circulaire uniforme *gauche*. Si le mouvement est *droit*, on doit changer dans ces équations ω en $-\omega$; elles deviennent

$$x = \mathrm{R}\cos(\omega t - \alpha),$$
$$y = -\mathrm{R}\sin(\omega t - \alpha).$$

L'équation dela trajectoire est dans les deux cas

$$x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2.$$

Dans le mouvement direct, par exemple, les composantes de la vitesse et la vitesse ont pour expression :

$$\frac{dx}{dt} = -\omega \mathrm{R}\sin(\omega t + \alpha) = -\omega y,$$
$$\frac{dy}{dt} = \omega \mathrm{R}\cos(\omega t + \alpha) = \omega x,$$
$$v^2 = \omega^2(x^2 + y^2), \qquad v = \omega \mathrm{R}.$$

L'accélération $\gamma = \omega^2 \mathrm{R}$ dirigée suivant la droite MO, vers le centre, a pour projections sur ces axes

$$\gamma_x = -\omega^2 \mathrm{R}\cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x,$$
$$\gamma_y = -\omega^2 \mathrm{R}\sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 y.$$

31. Application à une trajectoire quelconque. — Pour une trajectoire quelconque, nous avons vu que l'accélération est la dérivée géométrique d'un vecteur Am d'origine fixe A égal à la vitesse du mobile. On peut alors immédiatement résoudre les problèmes suivants :

Premier problème. — *Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que l'accélération du mouvement soit constamment tangente à la trajectoire?* — Comme la vitesse est tangente à la trajectoire, cela revient à demander quelle est la condition pour que l'accélération ait même direction que la vitesse. Mais l'accélération est la dérivée géométrique d'un vecteur Am égal à la vitesse; il faut donc chercher dans quel cas la dérivée du vecteur Am a même direction que ce vecteur. Pour cela il faut et il suffit que le vecteur Am, c'est-à-dire la vitesse, ait une *orientation fixe*. La vitesse ayant une orientation fixe, le mouvement est rectiligne. En effet, on peut toujours prendre trois axes Ox, Oy, Oz, dont l'un, Ox, soit parallèle à la direction de la vitesse; alors, en appelant y et z les coordonnées du mobile, les composantes de la vitesse suivant les axes Oy et Oz sont nulles,

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

donc y et z sont constants et le point décrit une droite parallèle à Ox.

Nous avions vu, dans la théorie du mouvement rectiligne, que, pour un tel mouvement, l'accélération a même direction que la vitesse; nous venons de démontrer la réciproque : le mouvement rectiligne est le seul qui possède cette propriété.

Deuxième problème. — *Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que l'accélération soit constamment normale à la trajectoire.* — Si l'accélération est normale à la trajectoire, elle est normale à la vitesse : or l'accélération est la dérivée géométrique d'un vecteur Am égal à la vitesse; la longueur r de ce vecteur est précisément la valeur numérique $\pm v$ de la vitesse. On veut que la dérivée du vecteur lui soit perpendiculaire : pour cela il faut et il suffit que le vecteur ait une longueur constante (25), c'est-à-dire que la vitesse ait une *valeur numérique constante*.

La trajectoire a alors une forme quelconque, mais elle est parcourue d'un mouvement uniforme.

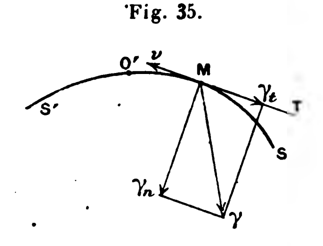
Dans ce cas l'hodographe est une courbe tracée sur une sphère de centre A.

Troisième problème. — *Quel est le mouvement le plus général dont l'accélération est nulle?* — La dérivée géométrique du vecteur Am, égal à la vitesse, est nulle. Ce vecteur est donc constant en grandeur, direction et sens. La vitesse étant constante en direction, le mouvement est rectiligne; la vitesse étant aussi constante en grandeur, le mouvement est uniforme. Le mouvement est donc *rectiligne et uniforme.*

Dans ce cas l'hodographe est un point.

32. Expression générale de l'accélération tangentielle. — Dans un mouvement curviligne quelconque, on appelle *accélération tangentielle* la projection de l'accélération du mobile M sur la tangente à la trajectoire en M.

Fig. 35.



Prenons une origine O' sur la trajectoire et un sens positif O'S pour les arcs. Soient, à l'instant t, M la position du mobile, s la valeur algébrique de l'arc O'M, et MT la tangente dans le sens positif. Nous avons déjà vu que le vecteur vitesse MV est tangent à la trajectoire et que sa valeur algébrique v, estimée positivement dans le sens MT, est

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Dans la *fig.* 35 le mobile est supposé marcher dans le sens négatif; s diminue quand t croît; v est négatif. Soient γ l'accélération du mobile, γ_t sa projection sur MT, cette pro-

jection étant positive si elle a le sens MT, négative dans le cas contraire. Nous allons démontrer qu'on a

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

En effet, supposons d'abord la vitesse v positive; alors le sens de v se confond avec celui de MT, et γ_t est la projection de γ sur la vitesse; or γ est la dérivée géométrique du vecteur vitesse de longueur $r = v$; la projection de γ sur ce vecteur lui-même est donc (24)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dt};$$

la formule est démontrée pour ce cas.

Supposons ensuite la vitesse v négative; alors le vecteur vitesse est en sens contraire de MT et γ_t est égal et de signe contraire à la projection de γ sur le vecteur vitesse; mais, en appelant r la longueur du vecteur vitesse, on a $r = - v$; la projection de γ sur le vecteur vitesse est

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{dv}{dt},$$

et sa projection sur MT est encore

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt}.$$

Nous avons ainsi l'expression algébrique de la projection de l'accélération sur la tangente.

On démontre que l'accélération γ est dans le plan *osculateur* en M du côté de la concavité de la trajectoire et que la projection γ_n de l'accélération sur la *normale principale* à la trajectoire est

$$\gamma_n = \frac{v^2}{\rho},$$

ρ désignant le *rayon de courbure* en M. Ce résultat est

l'extension à une courbe quelconque du théorème que nous avons démontré pour une trajectoire circulaire; on peut s'en rendre compte approximativement en remarquant que, sur une petite étendue, au voisinage d'un point M, une courbe quelconque peut être confondue avec un arc de cercle ayant pour plan le plan osculateur en M, et pour rayon le rayon de courbure en ce point.

Si, dans un mouvement, on connaît ces deux composantes tangentielle γ_t et normale γ_n, on obtient l'accélération γ en faisant leur somme géométrique; la grandeur de l'accélération est $\gamma = \sqrt{\gamma_t^2 + \gamma_n^2}$.

33. Application à la discussion d'un mouvement sur une trajectoire donnée. — L'expression de l'accélération tangentielle suffit à faire reconnaître la nature d'un mouvement sur une trajectoire donnée :

1° Si $\gamma_t = \frac{d^2s}{dt^2}$ est constamment nulle, $\frac{dv}{dt}$ est nulle aussi et, par suite, v est une constante; le mouvement est donc tel que sa vitesse change de direction avec le temps, puisqu'elle reste toujours tangente à la trajectoire, mais reste constante en grandeur : c'est le caractère d'un mouvement curviligne uniforme. Réciproquement, si v est une constante, $\frac{dv}{dt}$ est nul et par suite aussi $\frac{d^2s}{dt^2}$; la condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement soit uniforme est donc

$$\gamma_t = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 0;$$

2° Si $\frac{d^2s}{dt^2}$ est différent de zéro, le mouvement est varié, puisqu'on appelle ainsi tout mouvement qui n'est pas uniforme. Il peut être accéléré ou retardé si sa vitesse croît ou décroît en valeur absolue, c'est-à-dire suivant que le carré v^2

augmente ou diminue. Le mouvement est donc accéléré si la dérivée

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2v\frac{dv}{dt} = 2v\frac{d^2s}{dt^2} = 2v\gamma_t$$

est positive; il est retardé quand cette même quantité est négative. On peut dire aussi que le mouvement est accéléré quand v et γ_t ont le même signe, c'est-à-dire quand les vecteurs vitesse et accélération tangentielle ont le même sens; il est retardé dans le cas contraire.

3° Si l'accélération tangentielle $\frac{d^2s}{dt^2}$ est une constante γ_t, on a

$$(1) \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \gamma_t;$$

il en résulte que $v = v_0 + \gamma_t t$, v_0 et γ_t étant des constantes; et enfin on peut écrire

$$\frac{ds}{dt} = v = v_0 + \gamma_t t,$$

d'où résulte

$$(2) \qquad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma_t t^2,$$

la courbe est donc parcourue d'un mouvement uniformément varié.

Réciproquement, si la courbe est parcourue d'un mouvement uniformément varié, on peut passer par différentiation de l'équation (2) des espaces à l'équation (1)

$$(3) \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \gamma_t;$$

l'accélération tangentielle est constante; l'équation (3), dans laquelle γ_t est constant, est donc la condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement curviligne soit uniformément *varié*.

4° Si l'accélération tangentielle $\gamma_t = \frac{d^2s}{dt^2}$ est de la forme

$$\gamma_t = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a\omega^2 \cos \omega t, \tag{1}$$

on peut écrire

$$v = v_0 + a\omega \sin \omega t$$

et

$$s = s_0 + v_0 t - a \cos \omega t; \tag{2}$$

le mouvement est alors un mouvement périodiquement uniforme.

Réciproquement, si le mouvement sur la courbe est périodiquement uniforme, on peut remonter de l'équation (2), qui le représente, à l'équation (1), qui est donc la condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement soit périodiquement uniforme.

Pour que le mouvement forme une vibration simple, la même condition est nécessaire, mais elle n'est pas suffisante; il faut de plus que $v_0 = 0$. Or γ_t peut se mettre sous la forme

$$\gamma_t = -\omega^2(s - s_0 - v_0 t)$$

et, si v_0 est nul, on a

$$\gamma_t = -\omega^2(s - s_0).$$

L'accélération tangentielle est, en un point quelconque M de la trajectoire curviligne, proportionnelle à l'arc $s - s_0$ et dirigée dans le sens qui va vers le point fixe $s = s_0$. C'est la condition pour que le mouvement constitue une vibration simple.

C. — MOUVEMENT RAPPORTÉ A DES AXES DE COORDONNÉES ORTHOGONAUX OU OBLIQUES.

34. Équations du mouvement.

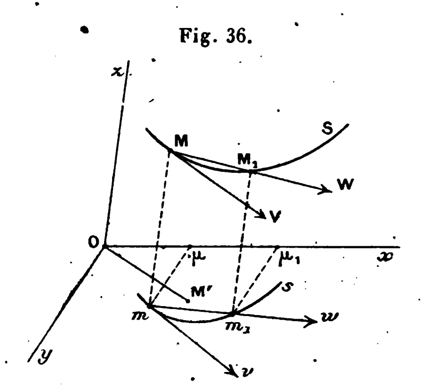
Trajectoire. — Soient trois axes de coordonnées Ox, Oy, Oz et un point mobile M dont les coordonnées x, y, z sont des fonctions continues données du temps

$$(1) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t), \qquad z = \psi(t).$$

Les *équations de la trajectoire* S s'obtiennent en éliminant t entre les *équations du mouvement* prises deux à deux; on obtient ainsi deux équations qui représentent deux surfaces dont l'intersection *comprend* la trajectoire.

Chacune de ces trois équations exprime la loi des espaces de la projection du mobile M sur l'un des axes; la première, par exemple, fait connaître la loi des espaces pour la projection μ sur Ox.

Fig. 36.



Si l'on considère deux d'entre elles, les deux premières, par exemple, elles font connaître à chaque instant la position dans le plan des xy de la projection m du mobile M; l'élimination de t entre ces deux équations donne l'équation de la trajectoire s

$$f(x, y) = 0$$

de la projection m du mobile M dans le plan des xy (*fig.* 36).

La combinaison des équations (1), deux à deux, fera donc

connaître la trajectoire et la loi des espaces de la projection de M sur chacun des plans de coordonnées.

Si par la projection s de la trajectoire S dans le plan des xy nous menons un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oz, la courbe S se trouve sur cette surface; elle se trouve aussi sur deux autres surfaces cylindriques construites de même sur les projections de S sur les plans des xz et des yz, et dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oy et à l'axe Ox; la trajectoire S est donc l'intersection commune de ces trois surfaces.

Projections de la vitesse et de l'accélération sur un axe ou un plan. — Soit M_1 la position du mobile sur la trajectoire à l'instant $t + \Delta t$; portons sur MM_1, dans le sens MM_1, une longueur MW égale à $\frac{\text{corde } MM_1}{\Delta t}$, c'est-à-dire à la vitesse moyenne du mobile pendant le temps Δt; les projections de la grandeur géométrique MM_1 sur les trois axes sont Δx, Δy, Δz; celles de la grandeur MW, ou vitesse moyenne, seront donc

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Si Δt tend vers zéro, MW tend vers MV; on aura donc, pour les projections de la vitesse sur les axes à l'instant t,

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \qquad \frac{dy}{dt} = \chi'(t), \qquad \frac{dz}{dt} = \psi'(t).$$

Il résulte de là que *la projection de la vitesse sur chacun des axes est la vitesse de la projection du mobile sur ces axes.*

Si m et m_1 sont les projections de M et M_1 sur la trajectoire s projetée dans le plan des xy, la vitesse du mouvement projeté sera la limite de $\frac{\text{corde } mm_1}{\Delta t}$, et comme la corde mm_1 est la projection de la corde MM_1, *la vitesse du*

mouvement projeté est la projection de la vitesse du mobile sur le plan.

Pour obtenir les expressions des projections de l'accélération sur les axes de coordonnées, construisons l'hodographe en prenant le point O comme origine fixe; nous mènerons par ce point un vecteur OM′ égal et parallèle à MV; la vitesse avec laquelle se déplacera l'extrémité M′ sera l'accélération du mouvement sur la courbe; or, d'après la propriété précédente, la projection de cette vitesse sur chacun des axes est la vitesse de la projection du mobile sur ces axes; les coordonnées du point M étant x, y, z, celles du point M′ sont $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, et les vitesses de ces projections sont

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \varphi''(t), \qquad \frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \chi''(t),$$

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \psi''(t);$$

les projections de l'accélération sont donc les dérivées secondes des coordonnées (1) du mobile prises par rapport au temps.

35. Mouvement d'un point :

1° Lorsque les projections sur trois axes sont des mouvements uniformes. — Soient

$$x = x_0 + vt, \qquad \frac{dx}{dt} = v,$$

$$y = y_0 + v't, \qquad \frac{dy}{dt} = v',$$

$$z = z_0 + v''t, \qquad \frac{dz}{dt} = v''$$

les équations des espaces et des vitesses de trois mouvements rectilignes uniformes suivant les axes x_0, y_0, z_0; v, v', v'',

étant des constantes. Les équations de la trajectoire sont celles d'une droite

$$\frac{x-x_0}{v}=\frac{y-y_0}{v'}=\frac{z-z_0}{v''}.$$

La vitesse est à chaque instant la diagonale du parallélépipède construit sur les axes en portant, à partir du point O, des vecteurs v, v' et v'' convenablement dirigés; elle est donc constante en grandeur et en direction et le mouvement est rectiligne et uniforme.

2° **Lorsque les projections sur deux d'entre eux sont des mouvements uniformes, la projection sur le troisième étant un mouvement uniformément varié.** — Soient

$$x=x_0+vt+\frac{1}{2}\gamma t^2,\qquad \frac{dx}{dt}=v+\gamma t,$$
$$y=y_0+v't,\qquad \frac{dy}{dt}=v',$$
$$z=z_0+v''t,\qquad \frac{dz}{dt}=v''$$

les équations du mouvement; x_0, y_0, z_0, v, v', v'' et γ étant des constantes. La trajectoire est une parabole dans le plan

$$\frac{y-y_0}{v'}=\frac{z-z_0}{v''},$$

parallèle à l'axe des x.

Ses projections sur les plans des xy et des xz sont des paraboles :

$$x-x_0=\frac{v}{v'}(y-y_0)+\frac{1}{2}\gamma\left(\frac{y-y_0}{v'}\right)^2,$$
$$x-x_0=\frac{v}{v''}(z-z_0)+\frac{1}{2}\gamma\left(\frac{z-z_0}{v''}\right)^2.$$

L'accélération a pour projection

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\gamma,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=0,\qquad \frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

Ses projections sur l'axe des y et sur l'axe des z étant nulles, elle est parallèle à l'axe des x, elle est de plus égale en grandeur à γ et, par suite, l'accélération du mouvement résultant est égale et parallèle à l'accélération de la composante uniformément variée du mouvement.

36. Vibrations elliptiques formées par deux vibrations simples rectangulaires. — Considérons deux mouvements vibratoires simples qui s'exécutent simultanément en un point O sur deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy ; l'équation qui donnera l'élongation du premier étant, par exemple,

$$x = a\cos(\omega t + \alpha),$$

et celle du second

$$y = b\cos(\omega' t + \beta),$$

l'élimination de t entre ces deux équations donnerait une relation entre x et y qui représenterait la trajectoire du point vibrant dans le plan.

Cette élimination est des plus faciles si nous supposons que les périodes T et T' des deux mouvements vibratoires sont égales ; car alors, puisque l'on a

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad \omega' = \frac{2\pi}{T'},$$

il en résulte

$$\omega = \omega'.$$

Les équations développées s'écrivent

$$x = a\cos\alpha\cos\omega t - a\sin\alpha\sin\omega t,$$
$$y = b\cos\beta\cos\omega t - b\sin\beta\sin\omega t.$$

On en tire facilement les valeurs

$$\sin\omega t = \frac{ay\cos\alpha - bx\cos\beta}{ab\sin(\alpha - \beta)},$$
$$\cos\omega t = \frac{ay\sin\alpha - bx\sin\beta}{ab\sin(\alpha - \beta)}$$

et en substituant dans

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$$

et simplifiant, il vient, en définitive,

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 - 2ab\, xy \cos(\alpha - \beta) = a^2 b^2 \sin^2(\alpha - \beta).$$

Cette équation représente dans le cas général une ellipse; on dit alors que la vibration est *elliptique*.

Dans quel sens la molécule vibrante décrit-elle cette trajectoire? L'ellipse est comprise entre les droites $+a$, $-a$, $+b$, $-b$ parallèles aux axes (*fig.* 37); figurons-la, et soit P le point de contact avec la droite A; on obtient ce point

Fig. 37.

$$x = a,$$

en prenant

$$\omega t + \alpha = 0,$$

$$\cos(\omega t + \alpha) = 1;$$

il en résulte que y se réduit à

$$y = b \cos(\beta - \alpha) = \text{AP}.$$

Si nous donnons un accroissement au temps, on a

$$\omega t + \alpha > 0;$$

posons cette quantité égale à ε^2,

$$\omega t + \alpha = \varepsilon^2.$$

On a

$$y = b \cos(\beta - \alpha + \varepsilon^2).$$

Si $\sin(\beta - \alpha) < 0$, y croît, P vient en P′, la molécule décrit l'ellipse en sens inverse des aiguilles d'une montre; *rotation gauche*.

Si $\sin(\beta - \alpha) > 0$, y décroît, la molécule tourne dans le sens des aiguilles d'une montre; *rotation droite*.

Cette ellipse est évidemment décrite dans le temps T d'une période, car, si l'on augmente t de T, x et y reprennent les mêmes valeurs, puisque les arcs sont augmentés de 2π; ceci se voit de suite en écrivant les équations

$$x = b\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right),$$

$$y = b\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \beta\right).$$

La position de cette ellipse dépend de la différence de phase. Si l'on a

$$\alpha - \beta = 2n\pi,$$

il s'ensuit

$$\sin(\alpha - \beta) = 0, \qquad \cos(\alpha - \beta) = 1;$$

l'équation se réduit à

$$a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy = 0;$$

la vibration redevient rectiligne, elle est représentée par la droite double

$$(ay - bx)^2 = 0;$$

c'est la diagonale du rectangle.

Si

$$(\alpha - \beta) = (2n+1)\pi,$$

le cosinus étant égal à -1 et le sinus nul, la vibration s'effectue suivant une autre droite symétriquement inclinée par rapport à l'axe des x

$$(ay + bx)^2 = 0.$$

L'ellipse est rapportée à ses axes dans le cas où

$$\alpha - \beta = (2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

On a, en effet,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

et, si les amplitudes a et b sont égales, la trajectoire prend la forme d'un cercle

$$x^2 + y^2 = a^2;$$

on dit que la vibration est *circulaire*.

Dans le cas général, les projections de la vitesse sur les axes sont

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \alpha),$$

$$\frac{dy}{dt} = -b\omega \sin(\omega t + \beta).$$

Les projections de l'accélération sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -b\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 y.$$

Il en résulte que l'accélération *totale* est

$$\gamma = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si l'on désigne par ρ le rayon vecteur du point P, dont les coordonnées sont x et y, on a

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et

$$\gamma = \omega^2 \rho;$$

l'accélération passe donc par le point O, elle est dirigée vers le centre suivant le rayon vecteur, et est proportionnelle à ce vecteur.

Dans le cas de la vibration circulaire, on retrouve la formule déjà établie

$$\gamma = \omega^2 \mathrm{R}.$$

37. Mouvement le plus général à accélération nulle. — Si l'accélération est nulle, ses projections le sont aussi;

on a donc le système d'équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Il en résulte que l'on a

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dy}{dt} = v', \quad \frac{dz}{dt} = v'',$$

v, v', v'' étant des constantes.

Par suite, les projections de la vitesse sur les trois axes sont des constantes, la vitesse est constante; on a enfin

$$x = x_0 + vt, \quad y = y_0 + v't, \quad z = z_0 + v''t,$$

d'où résultent les équations

$$\frac{x - x_0}{v} = \frac{y - y_0}{v'} = \frac{z - z_0}{v''}.$$

La trajectoire est donc une droite et le mouvement est, en définitive, rectiligne et uniforme.

D. — DIAGRAMMES D'UN MOUVEMENT.

38. Diagramme des espaces. — Soit $s = f(t)$ l'équation d'un mouvement curviligne. On prend deux axes de coordonnées rectangulaires, l'axe des temps Ot et celui des espaces Os; on porte en abscisses et en ordonnées les valeurs correspondantes de t et de s, mesurées à des échelles déterminées; on obtient ainsi une courbe qui représente graphiquement la loi du mouvement; on l'appelle la *courbe des espaces* ou le *diagramme des espaces*. C'est la courbe qui serait représentée en Géométrie analytique par $s = f(t)$.

Repos. — L'état stationnaire d'un corps *au repos* à une

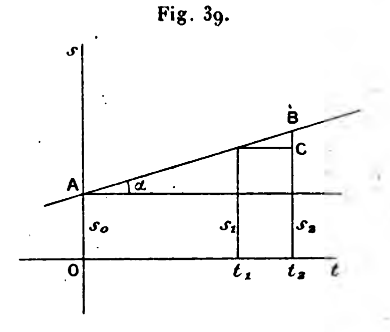
distance s_0 de l'origine des espaces est figuré par une droite parallèle à l'axe des temps.

Mouvement uniforme. — Le mouvement uniforme

$$s = s_0 + vt,$$

est figuré par une droite AB (*fig.* 39) qui coupe l'axe des s en un point A tel que $s = s_0$.

Fig. 39.



Pour que la vitesse v soit figurée par le coefficient angulaire de la droite AB, c'est-à-dire que l'on ait $v = \tan\alpha$, il suffit d'adopter une même longueur pour représenter l'unité de temps et l'unité d'espace; d'ailleurs la vitesse est donnée par la différence $BC = s_2 - s_1$ des espaces correspondant à deux abscisses dont la différence $t_2 - t_1 = 1$ est égale à l'unité.

Graphique des chemins de fer. — Ce sont ces principes très élémentaires que l'on applique au graphique des chemins de fer; la trajectoire des trains, c'est-à-dire la voie ferrée, est une courbe gauche; on représente sur une seule feuille la marche de tous les trains sur la voie ascendante et sur la voie descendante pendant un intervalle de vingt-quatre heures, en considérant leur mouvement comme une succession de mouvements uniformes séparés par des repos.

Sur l'axe horizontal des temps on figure par vingt-quatre intervalles égaux les heures de minuit à midi et à minuit; chacun de ces intervalles est divisé en six parties égales correspondant à dix minutes, et l'on trace une première série de parallèles à l'axe vertical des espaces passant par les points ainsi déterminés. On porte ensuite sur l'axe vertical une suite de longueurs proportionnelles aux distances qui séparent les stations dont on inscrit les noms en face des points qui

les figurent et l'on trace les horizontales passant par ces points; sur ce quadrillage on représente pour chaque train : 1° la *durée de ses arrêts* à chaque station par un segment de droite parallèle à l'axe des temps; 2° la *marche* du train entre deux stations qui se suivent par la droite qui joint l'heure de départ de la première à l'heure d'arrivée à la seconde.

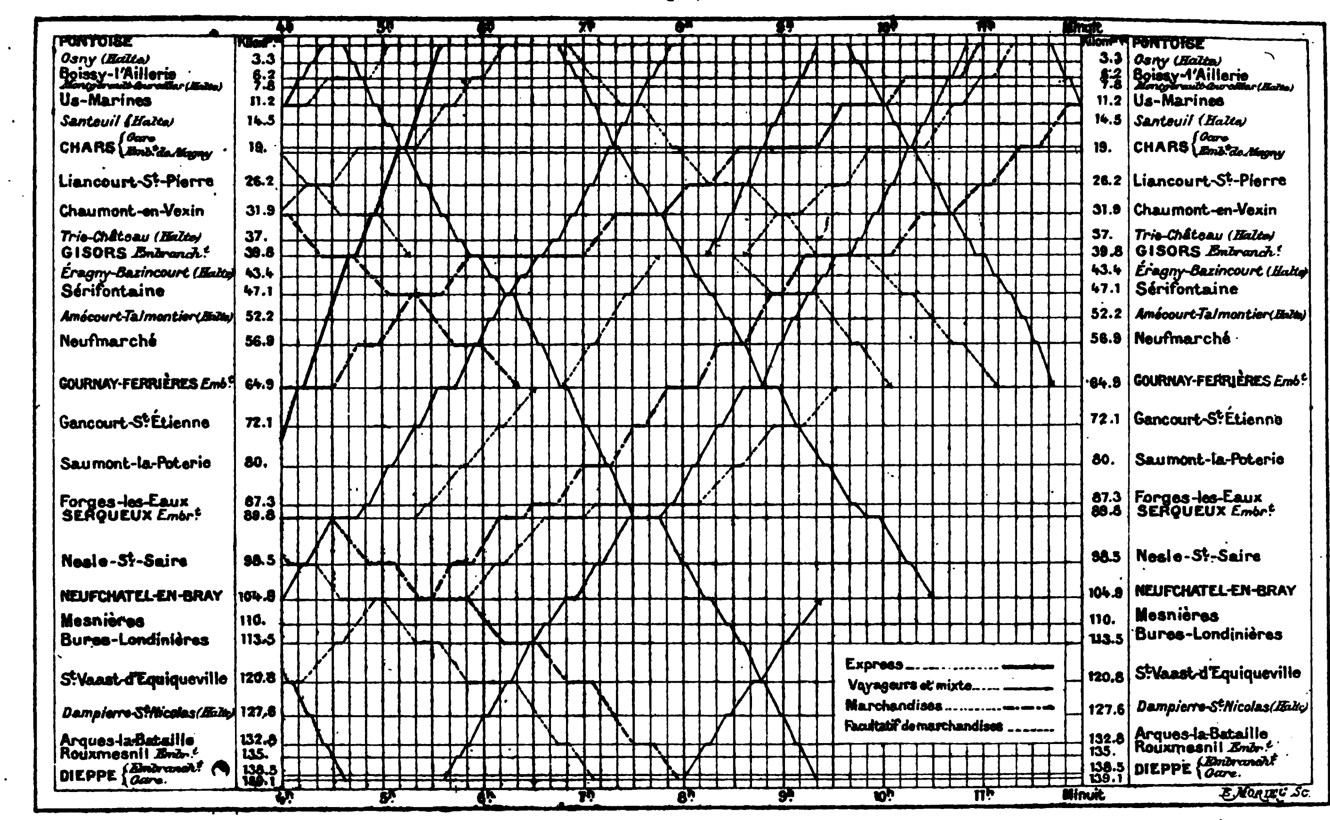
Ce graphique fait donc connaître pour chaque train l'heure d'arrivée et l'heure de départ à chaque station, sa vitesse relative entre les stations, et sa vitesse comparée à celle des autres trains, d'après l'inclinaison des lignes figuratives, et enfin les lieux et les heures de croisement des trains montants et des trains descendants.

La *fig.* 40 montre un exemple de ces graphiques.

Mouvement varié. — *L'équation du mouvement* est dans tous les cas l'*équation du diagramme*. Dans le cas d'un mouvement varié, $s = f(t)$, $f(t)$ étant une fonction continue quelconque de la variable t; le coefficient angulaire de la tangente en un point de la courbe ayant pour valeur $\frac{ds}{dt} = f'(t)$ fait connaître, en grandeur et en signe, la vitesse du mobile à l'instant t; et il est de même évident que le coefficient angulaire $\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ de la corde qui joint deux points quelconques fait connaître la valeur moyenne de la vitesse dans l'intervalle de temps correspondant.

Les points où la vitesse s'annule sont les points où la tangente est parallèle à l'axe du temps. Le signe de l'accélération tangentielle est donné par le sens de la concavité; car, dans une courbe $s = f(t)$ (s ordonnée, t abscisse), la concavité est tournée vers les s positifs quand $\frac{d^2 s}{dt^2}$ ou γ_t est positif, vers les s négatifs dans le cas contraire. Les points d'inflexion sont les points où l'accélération tangentielle est nulle.

Fig. 40.



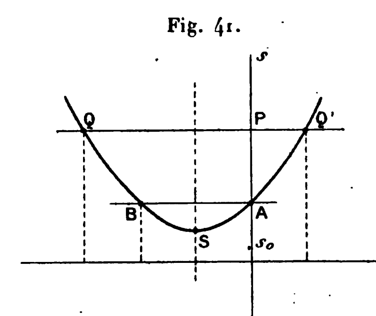
PONTOISE
Osny (Halte) 3.3
Boissy-l'Aillerie 6.2
Montgeroult-Courcelles (Halte) 7.8
Us-Marines 11.2
Santeuil (Halte) 14.5
CHARS {Gare / Emb.t de Magny 19.
Liancourt-St-Pierre 26.2
Chaumont-en-Vexin 31.9
Trie-Château (Halte) 37.
GISORS Embranch.t 39.8
Éragny-Bazincourt (Halte) 43.4
Sérifontaine 47.1
Amécourt-Talmontier (Halte) 52.2
Neufmarché 56.9
GOURNAY-FERRIÈRES Emb.t 64.9
Gancourt-St-Étienne 72.1
Saumont-la-Poterie 80.
Forges-les-Eaux 87.3
SERQUEUX Emb.t 89.8
Neslé-St-Saire 98.5
NEUFCHATEL-EN-BRAY 104.8
Mesnières 110.
Bures-Londinières 113.5
St-Vaast-d'Equiqueville 120.8
Dampierre-St-Nicolas (Halte) 127.6
Arques-la-Bataille 132.8
Rouxmesnil Emb.t 135.
DIEPPE {Embranch.t / Gare. 138.5 139.1
Kilom.
4h 5h 6h 7h 8h 9h 10h 11h Minuit
Express
Voyageurs et mixte
Marchandises
Facultatif de marchandises
E. Morieu Sc.

Mouvement uniformément varié. — Si le mouvement est uniformément varié, la courbe est du second degré et, d'après son équation

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \gamma_t t^2,$$

on voit que c'est une parabole coupant l'axe des s au point s_0; si s_0, v_0 et γ_t sont positifs, la courbe est représentée par la *fig.* 41. Les points A et B d'ordonnées s_0 ont pour abscisses $t = 0$ et $t = -\frac{2v_0}{\gamma_t}$; l'abscisse du sommet S est $t_1 = -\frac{v_0}{\gamma_t}$ et son ordonnée est

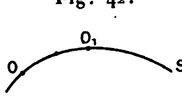
Fig. 41.



$$s_1 = s_0 - \frac{v_0^2}{2\gamma_t}.$$

On voit que le sommet est le point représentatif du point et de l'instant où la vitesse du mobile s'annule, remarque conforme à celle qui résulte de la discussion du trinome exposée au n° **12**. Toutes les lois du mouvement se voient de même sur cette courbe. Si t varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point figuratif du diagramme correspond à des valeurs de s d'abord décroissantes jusqu'au point S qu'il atteint pour $t = t_1 = -\frac{v_0}{\gamma_t}$; la vitesse est négative comme l'est le coefficient angulaire de la tangente, le mouvement est retardé puisque la vitesse tend vers zéro. Le point S du *diagramme* correspond donc au point O_1 de la *trajectoire* (*fig.* 42); à partir de ce point, s croît, la vitesse augmente et le mouvement est accéléré.

Fig. 42.



Le diagramme montre encore que, pour une valeur OP de s

plus grande que s_1, il existe deux valeurs du temps, ce qui prouve que le mobile passe à deux époques distinctes en tout point de sa trajectoire; les tangentes trigonométriques des angles que font avec l'axe des temps les tangentes menées en Q et en Q' sont égales et de signes contraires; les deux vitesses correspondantes sont donc égales et de signes contraires : résultats déjà vérifiés.

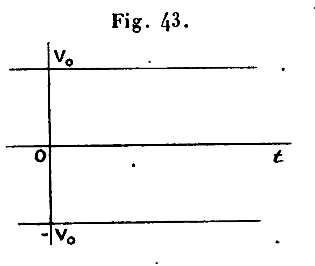
Enfin, l'accélération tangentielle étant toujours positive, la courbe tourne sa concavité vers les s positifs.

39. Diagrammes de la vitesse et de l'accélération tangentielle.

Vitesse. — A l'aide de deux axes de coordonnées rectangulaires, en portant en abscisses les temps et en ordonnées les valeurs correspondantes de la vitesse mesurées à des échelles convenables, on obtient de même un *diagramme des vitesses;* c'est le tracé de la courbe ayant pour équation $v = f'(t)$.

L'état de repos est figuré par l'axe des t, la vitesse étant nulle quel que soit t; le mouvement uniforme, de vitesse constante v_0, est figuré par une droite parallèle à l'axe du temps coupant l'axe des v en un point B tel que $OB = v_0$ en dessus ou en dessous de l'origine suivant que v_0 est positif ou négatif (*fig.* 43). Le diagramme des vitesses d'un mouvement varié est une courbe, puisque la vitesse change de valeur à chaque instant; la vitesse étant la dérivée de l'espace par rapport au temps, si l'équation des espaces est, par exemple, mise sous la forme $s = f(t)$, où $f(t)$ est un polynome développé suivant les puissances croissantes de t

Fig. 43.



et de degré n, l'équation des vitesses se mettra sous la forme

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

et le second membre sera un polynome de degré $n - 1$.

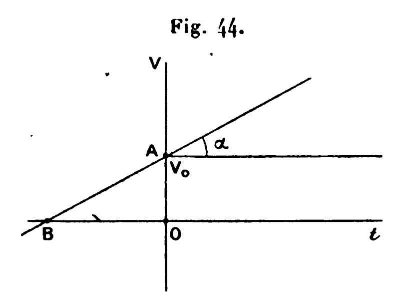
Le coefficient angulaire de la tangente en un point à ce diagramme des vitesses ayant pour valeur $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ fait connaître en grandeur et en direction l'accélération tangentielle γ_t du mobile à l'instant t.

Si le mouvement est uniformément varié, l'équation des vitesses est

$$v = v_0 + \gamma_t t,$$

le diagramme des vitesses est donc une droite; si v_0 et γ_t sont positifs, cette droite coupe, comme dans la *fig.* 44, l'axe des v au point A d'ordonnée v_0; si t varie de $-\infty$ à $+\infty$, le diagramme montre que la vitesse d'abord très grande, mais négative, tend vers zéro; l'accélération tangentielle étant par hypothèse positive, v et γ_t sont de signes contraires, le mouvement est uniformément retardé. Au point B d'abscisse $t_1 = -\frac{v_0}{\gamma_t}$ correspond une vitesse nulle; ce point B du diagramme des vitesses correspond au point S du diagramme des espaces et au point O_1 de la trajectoire. A partir de ce point la vitesse est positive et augmente au delà de toute limite; le mouvement est uniformément accéléré.

Fig. 44.

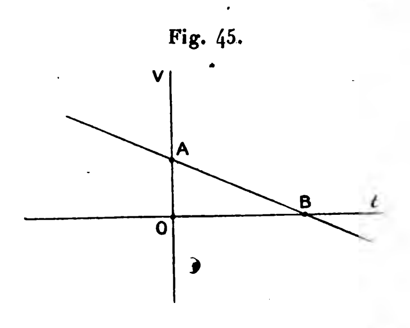


On étudierait de même le cas de v_0 positif et γ_t négatif $\gamma_t = -\gamma'_t$, représenté par la *fig.* 45 et par l'équation

$$v = v_0 - \gamma'_t t.$$

Le coefficient angulaire de ce diagramme rectiligne fait connaître la valeur de l'accélération tangentielle en grandeur et en signe.

Fig. 45.

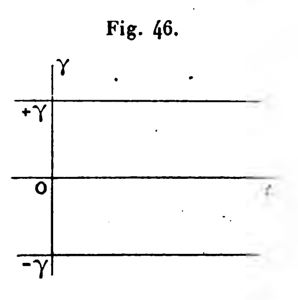


La vraie valeur de γ_t ne sera égale à tang α que si l'unité de temps et l'unité de vitesse sont représentées par une même longueur; dans ce cas, l'accélération tangentielle est donnée par la différence de deux ordonnées correspondant à deux abscisses dont la différence est égale à l'unité.

Accélération tangentielle. — Enfin on peut construire de la même façon un diagramme des accélérations tangentielles γ_t en portant en abscisses les temps et en ordonnées les accélérations tangentielles correspondantes.

L'état de repos et le mouvement uniforme caractérisé par une accélération nulle à toute époque sont figurés par l'axe des t. Le mouvement uniformément varié, caractérisé par une accélération tangentielle constante, est représenté par une parallèle à l'axe des t tracée à distance γ_t au-dessus ou au-dessous de l'origine, suivant que γ_t est positif ou négatif (*fig.* 46).

Fig. 46.



Le diagramme des accélérations tangentielles d'un mouvement varié $s = f(t)$ est une courbe ayant pour équation, par rapport aux axes Ot et Oγ,

$$\gamma_t = f''(t).$$

L'étude simultanée de ces quatre courbes, la trajectoire et

les diagrammes des espaces, des vitesses et des accélérations tangentielles, permet de se rendre compte des lois du mouvement par la seule inspection de ces figures géométriques.

Il est important de remarquer que, si le mouvement considéré est rectiligne, l'accélération tangentielle γ_t n'est autre que l'accélération totale du mouvement; à cette différence près, tout ce qui précède s'applique, en particulier, au mouvement rectiligne.

40. Diagrammes d'un mouvement rectiligne périodique simple. — Dans ces sortes de mouvement l'élongation, la vitesse et l'accélération totale étant des fonctions sinusoïdales ou cosinusoïdales, c'est-à-dire des fonctions périodiques simples, ou encore des fonctions harmoniques, les diagrammes construits d'après la méthode générale indiquée sont des sinusoïdes ou des cosinusoïdes; les relations de position et de grandeur de ces courbes font connaître les lois du mouvement qu'elles représentent.

Mais dans l'étude des mouvements vibratoires en acoustique ou en optique, on emploie, pour représenter ces courbes, une méthode dite *cinématique;* l'application de cette même méthode de figuration géométrique à la représentation et à l'étude des grandeurs périodiques qui caractérisent les courants alternatifs en fait saisir la généralité et l'importance.

Cherchons à figurer d'abord la vitesse $v = \omega a \sin \omega t$; pour cela, traçons une droite OA faisant avec un axe fixe Ot un angle $\omega t = \frac{2\pi t}{T}$ et portons sur cette droite (*fig.* 47) une longueur $OA = \omega a$; l'ordonnée OP du point A a pour expression

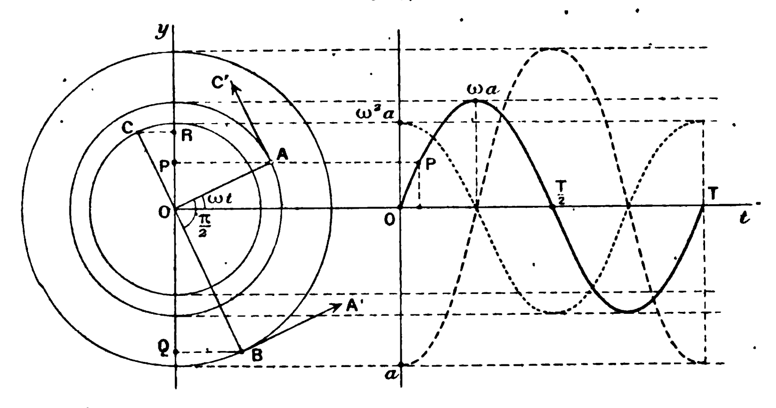
$$OP = \omega a \sin \omega t.$$

Cette projection du vecteur OA représente donc, à l'instant t, la vitesse v.

Imaginons que ce vecteur tourne dans le sens inverse des

aiguilles d'une montre autour du point O, avec une vitesse $\omega = \frac{2\pi}{T}$ uniforme. Supposons de plus qu'il soit en coïncidence avec l'axe Ot à l'origine des temps ; la projection de ce vecteur

Fig. 47.



tournant sur l'axe des y figure à chaque instant en grandeur et en signe la vitesse v.

On peut d'ailleurs tracer la sinusoïde, diagramme ordinaire des vitesses, en se servant de ce vecteur tournant comme le montre la figure.

La vitesse est la dérivée de l'élongation x par rapport au temps, et avec le choix d'origine que nous avons fait (n° **13**) on a

$$x = -a\cos\omega t = a\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Le vecteur figuratif de l'élongation sera donc déterminé par sa longueur a et il devra présenter, par rapport au vecteur qui figure la vitesse, une différence de phase $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire qu'il sera perpendiculaire à ce dernier dans le sens que montre la figure; on donne à cette différence de phase le nom de *décalage;* ainsi le vecteur élongation présente, par

rapport au vecteur vitesse, un ***décalage en arrière*** de $\frac{\pi}{2}$, sa projection sur l'axe vertical

$$OQ = a \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -a \cos \omega t$$

fera connaître à chaque instant l'élongation; on a tracé d'ailleurs en traits et en points le diagramme ordinaire figurant l'équation du mouvement.

Ce qu'il importe de retenir, c'est que, pour ces fonctions périodiques, en passant de la dérivée à la fonction primitive, le vecteur prend un *retard* $\frac{\pi}{2}$; inversement le vecteur prend une *avance* $\frac{\pi}{2}$ lorsqu'on passe de la fonction primitive à la dérivée; il en résulte, puisque l'accélération est la dérivée de la vitesse, que le vecteur OC, dont la projection sur l'axe vertical $OR = a\omega^2 \cos \omega t$ représentera à chaque instant l'accélération totale, sera perpendiculaire sur le vecteur OA et en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur lui, comme le montre la *fig.* 47; la courbe en points est le diagramme des accélérations.

On peut comparer ces résultats géométriques à ceux déjà résumés par le Tableau de la page 28.

On reconnaîtra d'ailleurs aisément, sur la figure, que ces constructions ne sont, en définitive, qu'une application du principe de l'hodographe.

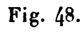
41. Somme de mouvements périodiques parallèles et de même période. — Cette figuration conduit à une méthode géométrique simple d'addition des mouvements vibratoires parallèles et de même période.

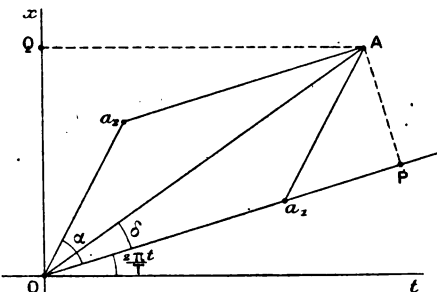
Soit à ajouter deux mouvements vibratoires dont les équations sont

$$x_1 = a_1 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$x_2 = a_2 \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \alpha\right);$$

traçons un vecteur $Oa_1 = a_1$ faisant avec une droite prise pour axe des temps et origine des phases un angle $2\pi\frac{t}{T}$ (*fig.* 48) et


Fig. 48.



un second vecteur $Oa_2 = a_2$ faisant avec le même axe un angle $2\pi\frac{t}{T} + \alpha$, la diagonale $OA = A$ représente l'amplitude de la fonction résultante. On a en effet

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\alpha,$$

équation identique à l'équation (3) (n° 16).

La différence de phase de la fonction harmonique résultante est définie par l'angle $\delta = AOa_1$; on a en effet

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{AP}{OP} = \frac{a_2\sin\alpha}{a_1 + a_2\cos\alpha}$$

équation identique à l'équation (4) (n° 16). On voit d'ailleurs que la projection OQ sur l'axe vertical

$$OQ = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \delta\right)$$

fait connaître à chaque instant la fonction harmonique X comme le montre l'équation (2) (n° 16).

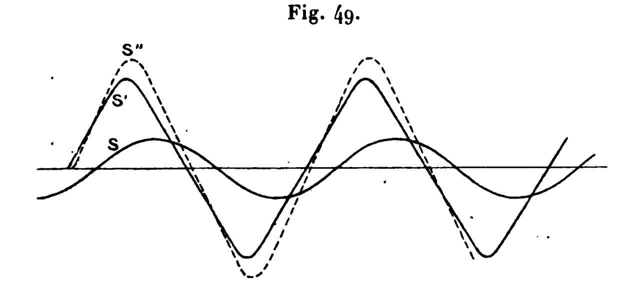
Il est donc évident que, si a_1, a_2, A, invariablement liés, tournent avec une vitesse uniforme $\omega = \frac{2\pi}{T}$, leurs projections

sur l'axe des x feront connaître à chaque instant les fonctions composantes et leur résultante.

On voit que le parallélogramme que nous venons de construire suffit, pendant sa rotation, à faire connaître les éléments du mouvement résultant; on peut cependant employer le diagramme ordinaire et tracer les deux sinusoïdes S et S′ et leur résultante S″, obtenue (*fig.* 49) en faisant la somme des ordonnées correspondant à une même abscisse.

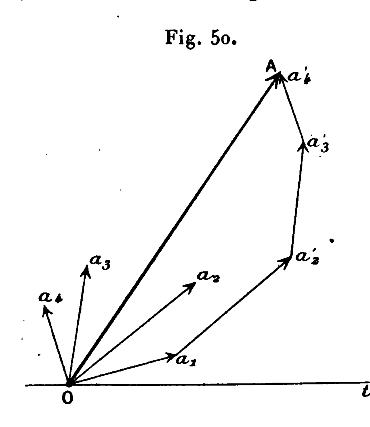
D'une façon générale, on pourra composer de la même

Fig. 49.



manière un nombre quelconque de mouvements vibratoires parallèles de même période : on représentera chaque mouvement vibratoire par une droite de longueur égale à l'amplitude a_1 comptée à partir d'une origine fixe O (*fig.* 50), et dont la direction Oa_1, avec un axe fixe Ot, représente la phase $\frac{2\pi t}{T} + \alpha_1$; l'amplitude du mouvement vibratoire résultant de la superposition de tous ces mouvements est représentée par la *résultante* OA du polygone construit avec toutes ces droites et

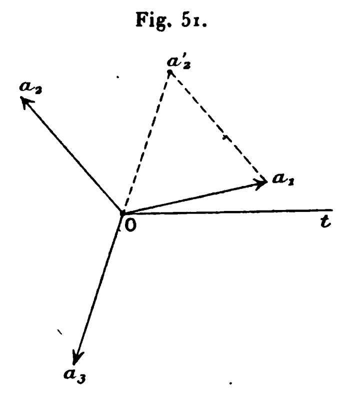
Fig. 50.



l'angle que fait OA avec Ot représente la phase du mouvement résultant.

Ces constructions sont d'ailleurs aussi applicables aux vitesses et aux accélérations.

Fig. 51.

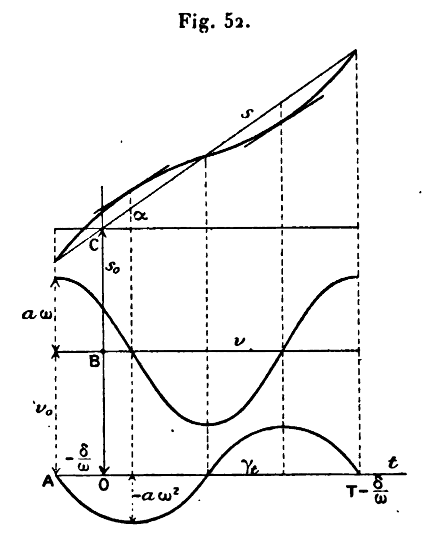


Si nous composons par exemple trois mouvements vibratoires de même amplitude, mais dont les phases diffèrent de $\frac{2\pi}{3}$, la construction précédente (*fig.* 51) montre que la résultante est nulle puisque le polygone est fermé.

42. Diagrammes du mouvement périodiquement uniforme. — Les équations analogues à celles du numéro **19** :

$$s = s_0 + v_0 t + a \sin(\omega t + \delta),$$
$$v = v_0 + a\omega \cos(\omega t + \delta),$$
$$\gamma_t = -a\omega^2 \sin(\omega t + \delta)$$

Fig. 52.



sont les équations des trois diagrammes des espaces, des vitesses et des temps qui caractérisent le mouvement périodiquement uniforme sur une courbe; en les rapportant à un même système d'axes de coordonnées rectangulaires on obtient les trois courbes de la *fig.* 52, où l'on a supposé s_0, v_0, a et δ positifs.

Le diagramme d'accélération γ_t est une sinusoïde qui coupe l'axe des temps au point A à distance $-\frac{\delta}{\omega}$; on a figuré la courbe correspondant à une seule période; elle est d'abord au-dessous de l'axe des t et son ordonnée minimum est $-a\omega^2$.

Pour tracer le diagramme des vitesses, on a mené Bv parallèle à l'axe des t à distance v_0; la courbe est une cosinusoïde qui, rapportée à ce nouvel axe, présente au point d'abscisse $-\frac{\delta}{\omega}$ une ordonnée $a\omega$.

Enfin, pour tracer le diagramme des espaces on figure d'abord la droite

$$s = s_0 + v_0 t$$

qui coupe l'axe des s au point C d'ordonnée $OC = s_0$ et qui fait avec l'horizontale un angle α tel que l'on ait

$$\tang\alpha = v_0;$$

à partir des points de cette droite déterminés par les valeurs de t on portera des longueurs égales à $a\sin(\omega t + \delta)$; on obtiendra ainsi une sorte de sinusoïde rapportée à un axe oblique qui présentera des tangentes parallèles à cet axe aux points correspondant au quart et aux trois quarts de la période.

MÉCANIQUE.

A. — POINT MATÉRIEL LIBRE.

43. Axes fixes. — On rapporte les positions de tous les corps à un système d'axes que l'on appelle, par définition, *axes absolument fixes :* ce système d'axes est un trièdre trirectangle *invariablement lié aux étoiles appelées étoiles fixes.*

44. Point matériel. — Afin de commencer par le problème le plus simple, on étudie d'abord le mouvement d'une portion de matière assez petite pour qu'on puisse, sans erreur sensible, déterminer sa position comme celle d'un point géométrique. Une telle portion de matière s'appelle un *point matériel.* On considère ensuite les corps comme formés par la réunion d'un très grand nombre de points matériels.

En même temps qu'il change de position un point matériel peut tourner et se déformer; mais on ne s'occupe, dans ce qui suit, que de la position du point et non de la manière dont il peut tourner et se déformer.

L'observation et l'expérience montrent que les points matériels agissent les uns sur les autres : ainsi les points matériels qui constituent un corps appelé *solide* agissent les uns sur les autres de façon à maintenir, à peu de chose près, la forme du corps quand on cherche à le déformer; deux points électrisés s'attirent ou se repoussent; etc.

45. Principe de l'inertie. — *Un point matériel livré à lui-même a, par rapport aux axes fixes, une accélération nulle.* D'après ce principe, un point matériel livré à lui-même est, ou bien immobile, ou bien animé d'un mouvement recti-

ligne et uniforme (nº 37). Les deux cas peuvent se présenter suivant les conditions initiales dans lesquelles on place le point : 1º on peut supposer le point livré à lui-même sans vitesse, alors il reste immobile; 2º on peut supposer qu'on livre le point à lui-même après lui avoir communiqué, par un procédé quelconque, une vitesse V, par exemple après l'avoir lancé avec la main; alors il conserve indéfiniment cette vitesse en grandeur, direction et sens, et il prend un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse V.

46. Force. — D'après le principe de l'inertie, si l'on observe un point matériel possédant une accélération, ce point n'est pas livré à lui-même; d'autres points agissent sur lui. L'accélération que possède le point est donc l'effet d'une cause extérieure à lui; cette cause est ce qu'on appelle une *force*. L'effet d'une force sur un point est donc de lui imprimer à chaque instant une certaine accélération γ. On ne s'occupe pas en Mécanique et en Physique de l'essence des forces qu'il est impossible de pénétrer; on cherche, simplement, à prévoir et à calculer les effets des forces. Dans ce but, on caractérise et l'on mesure chaque force par l'effet qu'elle produit sur un point matériel, c'est-à-dire par l'accélération qu'elle lui imprime.

47. Masse. — Quand un point matériel déterminé, soumis à une force, possède, à un instant t, une accélération γ; on représente la force qui agit sur lui à cet instant par un vecteur F ayant pour origine le point, pour direction et sens la direction et le sens de l'accélération γ et pour longueur le produit de γ par un coefficient positif m, caractéristique du point et appelé *masse* du point :

$$F = m\gamma.$$

Une force est donc représentée par un *vecteur;* on dit qu'elle

a pour point d'application le point matériel sur lequel elle agit, qu'elle a pour direction et sens la direction et le sens du vecteur qui la représente, enfin qu'elle a pour intensité le nombre qui mesure la longueur du vecteur. On peut résumer ce qui précède en disant qu'une force F, agissant sur un point matériel, lui imprime une accélération γ, liée à F par la relation géométrique

$$(F) = m(\gamma),$$

vraie en grandeur, direction et sens.

Quand par la suite nous parlerons d'une force F appliquée à un point, il faudra toujours entendre par là un certain vecteur défini en grandeur, direction ou sens.

Remarque importante. — Ces faits ne sont rigoureusement vrais que pour les mouvements rapportés au système d'axes fixes indiqué. Mais ce n'est qu'en Astronomie ou dans le cas de quelques expériences tout à fait exceptionnelles (comme le pendule de Foucault, par exemple) que l'on a besoin de se servir de ce système d'axes. Dans l'immense majorité des cas, il est permis de prendre un système d'axes lié à la terre : il n'en résulte aucune inexactitude appréciable, comme le montre l'observation, d'accord avec la théorie des mouvements relatifs.

48. Pesanteur; poids : 1° Point matériel. — Un point matériel lancé dans le vide prend par rapport à la terre une accélération g, constante en un même lieu, dirigée suivant la verticale descendante du lieu. On dit que cette accélération est due à la pesanteur; elle varie avec la latitude et l'altitude; à Paris, elle est représentée par le nombre 981, l'unité de longueur étant le centimètre, et l'unité de temps étant la seconde de temps moyen. On en conclut qu'un point pesant est, en un lieu déterminé, soumis à une force constante dirigée suivant la verticale descendante ; cette force s'appelle le *poids absolu*

du point. L'intensité du poids absolu d'un point de masse m est liée à l'accélération g imprimée par ce poids au point par la relation

$$p = mg,$$

le coefficient m étant une constante caractéristique du point matériel considéré. Ce poids absolu varie comme g avec la latitude et l'altitude.

2° **Corps quelconque.** — On regarde un corps quelconque comme formé par la réunion d'un très grand nombre de points matériels. La masse totale M d'un corps est la somme des masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ des points matériels qui le constituent

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n.$$

Les corps que l'on a à considérer, en Mécanique appliquée ou en Physique, ont des dimensions assez petites pour que la valeur de l'accélération g, due à la pesanteur, soit la même en grandeur, direction et sens dans toute leur étendue. Les poids absolus des divers points matériels constituant un de ces corps sont alors

$$p_1 = m_1 g, \quad p_2 = m_2 g, \quad \ldots, \quad p_n = m_n g;$$

leur somme

$$P = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

s'appelle le *poids absolu* du corps au lieu considéré; d'après les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonction des masses, on a immédiatement

$$P = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n) g = Mg.$$

Le poids absolu d'un corps en un lieu est donc le produit de la masse totale du corps par l'accélération due à la pesanteur en ce lieu.

Quand un point matériel est retenu par un obstacle, il peut

rester immobile; par exemple, un point pesant placé sur une table ou sur la main de l'observateur reste immobile; cela tient à ce que l'obstacle exerce aussi sur le point une *réaction* ou *force,* et cette force empêche le poids absolu de mettre le point en mouvement.

Le point matériel exerce alors sur l'obstacle une *action,* ou *force pressante,* ou *pression totale,* égale à son poids absolu. C'est ainsi qu'on peut, très grossièrement, comparer entre eux les poids absolus des corps par la sensation de l'effort musculaire nécessaire pour les empêcher de tomber.

49. Les trois unités fondamentales. — En Géométrie on n'a à considérer qu'une unité *fondamentale,* l'unité de longueur, d'où l'on déduit ensuite les unités *dérivées* de surface et de volume.

En Cinématique on se sert de deux unités fondamentales : l'unité de longueur et celle de temps, et l'on en déduit les unités employées aux mesures des autres quantités, vitesse, accélération.

Enfin, en Mécanique, il faut employer *trois unités fondamentales,* les unités de longueur, de temps et une troisième unité qui est, suivant les deux systèmes en usage, une unité de masse ou une unité de force.

50. Système C.G.S. — Ce système repose sur ce fait que les masses des corps sont proportionnelles à leurs poids absolus en un même lieu. En effet, soient m, m', m'', ... les masses de certains corps; p, p', p'', ... leurs poids absolus en un lieu où l'accélération due à la pesanteur est g : on a

$$p = mg, \qquad p' = m'g, \qquad p'' = m''g, \qquad \ldots;$$

les quantités p, p', p'', ... sont donc proportionnelles à m, m', m'', ...

Si

$$p = p', \qquad m = m';$$

et si

$$v = p' + p'',$$

on a

$$m = m' + m''.$$

Dès lors on peut, à l'aide d'une balance, comparer entre elles les masses des corps.

Lorsqu'on pèse un corps dans le vide par la méthode de la double pesée, on le place dans un plateau d'une balance, on lui fait équilibre avec une tare; puis on enlève le corps et on le remplace par des poids marqués de façon à rétablir l'équilibre. Dans ces conditions, *le corps a même masse que les poids marqués*. En effet, il est évident que le corps et les poids marqués faisant successivement équilibre à la même tare exerceront la même action sur le plateau; le corps et les poids marqués ont donc même poids absolu et par suite même masse.

Prenons alors comme unité de masse la masse d'un centimètre cube d'eau au maximum de densité; cette unité s'appelle le *gramme-masse*. Tous les corps qui, dans la méthode de la double pesée, font équilibre à la même tare qu'un poids marqué 1 gramme, ont même masse que ce poids marqué, c'est-à-dire même masse qu'un centimètre cube d'eau; ils ont donc une masse 1. Tous les corps faisant équilibre à la même tare qu'un poids marqué 2 grammes ont pour masse 2, etc. Tous les corps faisant équilibre à la même tare qu'un poids marqué n grammes (n entier ou fractionnaire) ont une masse mesurée par le nombre n.

Conformément aux principes adoptés par la Commission Britannique en 1871 et par le Congrès des Électriciens en 1881, on a pris comme unités fondamentales : pour la longueur, le centimètre C; pour la masse, la masse du gramme G; pour le temps, la seconde de temps moyen S.

Ce système d'unités est le système C.G.S. (centimètre, gramme-masse, seconde).

Unité de force dans le système C.G.S. Dyne. — Une fois qu'on sait mesurer les longueurs, les masses et les temps, on sait mesurer les forces d'après la relation fondamentale

$$F = m\gamma$$

qui lie l'intensité de la force à l'accélération qu'elle imprime à un point de masse m. L'unité de force sera la force exprimée par le nombre 1; pour avoir $F = 1$ il suffit de faire $m = 1$, $\gamma = 1$.

Dans le système C.G.S. l'unité de force est la force qui, agissant sur l'unité de masse, un gramme-masse, lui imprime l'accélération 1, les unités de longueur et de temps étant le centimètre et la seconde. Cette unité de force s'appelle la *dyne*.

Cette unité est très petite par rapport aux forces que l'homme peut développer avec son système musculaire. Ainsi, à Paris, le poids absolu de 1 gramme-masse (centimètre cube d'eau) est 981 dynes, car ce poids p imprime à la masse 1 une accélération de 981 unités; on a dès lors

$$p = 1 \times 981 = 981 \text{ dynes.}$$

La dyne est donc un poids de l'ordre de grandeur du *milli-gramme-poids*.

L'effort musculaire qu'on fait en soutenant un poids de 1^{kg} est de 981 000 dynes, ou sensiblement une *mégadyne*.

Poids commerciaux. — Il résulte de ce qui précède que les quantités appelées *poids* dans le commerce ne sont pas des poids, mais des masses; le poids commercial d'un corps en grammes n'est autre chose que sa masse dans le système C. G. S.

51. **Deuxième système.** — On emploie fréquemment, dans les applications, un deuxième système d'unités dans lequel on considère, comme unités fondamentales, les unités de *lon-*

gueur, de *force* et de *temps,* l'unité de masse devenant alors une unité dérivée.

Le système le plus souvent employé est le suivant:

Unité de longueur.......	mètre;
Unité de force..........	kilogramme-force;
Unité de temps.........	seconde,

le kilogramme-poids ou kilogramme-force étant le poids absolu d'un litre d'eau à Paris. Il est indispensable d'ajouter, dans la définition de cette unité de force, que le poids absolu est pris en un lieu déterminé, Paris par exemple, car le poids absolu d'un corps change avec la latitude et l'altitude.

Unité de masse dans ce système. — Dans ce système, la masse d'un point est définie par la formule

$$m = \frac{p}{g},$$

p étant le poids absolu évalué en kilogrammes-forces et g l'accélération due à la pesanteur. Si l'on fait $p = g$, on a $m = 1$. L'unité de masse est donc la masse d'un point dont le poids absolu est g kilogrammes-forces.

A Paris, g étant, avec ce choix d'unités fondamentales, égal à 9,81, l'unité de masse sera la masse de $9^{\text{lit}},81$ d'eau distillée à 4°.

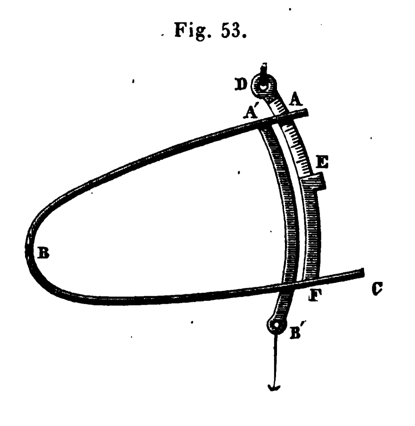
L'inconvénient de ce système est que l'unité de force, le kilogramme-force, est une quantité dont la définition exige l'indication d'un lieu déterminé à la surface de la terre; de plus, la masse d'un corps, qui est une qualité physique inhérente à ce corps, est exprimée par des nombres différents, suivant que le kilogramme-force est défini en un lieu ou l'autre de la terre. C'est ce qu'on évite dans le système C.G.S., pour lequel la définition des unités n'exige l'indication d'aucun lieu déterminé.

Gramme-force. — Le gramme-force est le poids absolu d'un

centimètre cube d'eau à Paris; c'est la millième partie du kilogramme-force que nous venons de définir.

52. Mesure statique des forces. — Le système de mesures qui consiste à prendre un poids absolu pour l'une des unités fondamentales a été le premier employé. Cela tient à ce que l'homme s'est d'abord fait une idée de la force par l'effort qu'il est obligé de faire pour supporter un fardeau; d'où la comparaison des forces aux poids. Cette comparaison peut se faire d'une manière plus précise à l'aide du *dynamomètre* (*fig.* 53). Prenons un ressort de forme quelconque, dont la flexion peut être mesurée par une graduation; suspendons à ce ressort, à Paris, des poids de 1^{kg}, de 2^{kg}, etc.; nous pourrons noter les flexions correspondantes.

Fig. 53.



Alors pour trouver l'intensité d'une force quelconque agissant sur un point matériel nous pourrons fixer le point à l'extrémité du ressort, convenablement orienté, et noter la flexion correspondante; nous aurons la mesure de la force en kilogrammes-forces.

53. Homogénéité dans le système d'unités, longueur, masse, temps. Dimensions des unités dérivées. — Si, pour les applications, il est indispensable de faire choix d'un système d'unités déterminées, il n'en est pas de même pour la théorie. Dans les recherches théoriques, il est préférable de laisser les unités fondamentales indéterminées, de façon que les formules obtenues puissent être appliquées à tout

système d'unités. Les formules devant alors subsister, quel que soit le choix des trois unités fondamentales, devront présenter une triple homogénéité par rapport aux longueurs, aux masses et aux temps.

Si l'on change la grandeur d'une unité fondamentale, l'expression numérique d'une quantité, préalablement exprimée en fonction de la première unité, change : soient, en effet, n l'expression numérique d'une quantité et N la grandeur de l'unité précédemment choisie; si l'unité devient N', l'expression de la quantité sera n'; exprimons que l'unité N est comprise n fois dans la quantité à mesurer et que l'unité N' y est comprise n' fois, nous aurons la relation

$$nN = n'N',$$

donc

$$\frac{n}{n'} = \frac{N'}{N}.$$

Le rapport des valeurs numériques d'une même quantité est égal au rapport inverse des grandeurs des unités qui ont été successivement employées à la mesure.

Si l'unité est dérivée, et si elle varie par suite du changement de l'unité fondamentale, il faut, pour traiter ce même problème, savoir comment l'unité dérivée dépend des unités fondamentales ; on est conduit ainsi à définir les *dimensions* des unités dérivées.

On appelle formule de dimensions d'une unité dérivée la relation qui lie cette unité aux unités fondamentales.

Ainsi, par exemple, l'unité de surface est la surface construite sur l'unité de longueur, c'est-à-dire que l'unité dérivée de surface varie comme le carré de l'unité fondamentale de longueur; ses dimensions sont représentées par le symbole

$$S = L^2,$$

et l'on dit que l'unité de surface est de dimension *deux en longueur*, *zéro en masse* et *zéro en temps*.

Il en résulte que, si l'on appelle s une surface mesurée à l'aide d'une unité fondamentale de longueur, si l'on prend une unité de longueur λ *fois plus petite,* la mesure de cette quantité sera $s\lambda^2$, c'est-à-dire λ^2 *fois plus grande.*

D'une façon générale, dans le système C.G.S. une unité dérivée N sera reliée aux trois unités fondamentales représentées par les symboles L, M, T, par une expression de la forme

$$N = L^\alpha M^\beta T^\gamma.$$

Cette formule exprime ce que l'on appelle les dimensions de l'unité dérivée, qui est de dimension α en longueur, β en masse, γ en temps.

Ces nombres α, β et γ peuvent être positifs, nuls ou négatifs.

Si une quantité de dimensions α, β, γ est mesurée par le nombre Q avec un certain choix des unités fondamentales, elle sera mesurée par le nombre

$$Q.\lambda^\alpha \mu^\beta \tau^\gamma$$

si l'on prend une unité de longueur λ fois plus petite, une unité de masse μ fois plus petite et une unité de temps τ fois plus petite.

Appliquons ces principes aux grandeurs que nous avons définies en Cinématique et en Mécanique.

54. Dimensions de la vitesse, de l'accélération et de la force ; unités.

Vitesse. — La *vitesse* est le quotient d'un espace parcouru par un temps ; on a donc

$$(1) \qquad v = \frac{L}{T} = LT^{-1},$$

elle est de dimension *un* en longueur et *moins un* en temps.

L'unité de vitesse est celle d'un mobile qui parcourt l'unité de longueur pendant l'unité de temps; les vitesses sont le plus souvent exprimées en centimètres ou mètres à la seconde ou en kilomètres à l'heure.

Suivant le système d'unités adopté, l'expression numérique de la vitesse change comme le montre l'équation (1). Le rapport des valeurs numériques d'une même vitesse est égal au rapport inverse des grandeurs des unités de longueur et au rapport direct des grandeurs des unités de temps employées.

Supposons, par exemple, que la vitesse d'un train soit exprimée en kilomètres à l'heure par le nombre 72 et proposons-nous de calculer l'expression numérique v de cette même vitesse en centimètres à la seconde. Nous écrirons, d'après la règle précédente,

$$v = 72 \times 10^5 \times \frac{1}{3\,600} = 2\,000.$$

Accélération. — L'*accélération* est le rapport de l'accroissement de la vitesse à la variation du temps, c'est-à-dire le quotient d'une vitesse par un temps; par suite,

$$(2) \qquad \gamma = \frac{v}{T} = LT^{-2},$$

elle est de dimension *un* en longueur et de dimension *moins deux* en temps.

L'unité d'accélération est celle d'une vitesse qui s'accroît de l'unité de vitesse pendant l'unité de temps; dans un système où l'on prend le centimètre et la seconde comme unités de longueur et de temps, l'unité d'accélération serait celle d'un mobile dont la vitesse augmenterait *en une seconde d'un centimètre par seconde;* cette unité d'accélération n'a pas reçu de nom particulier.

L'accélération de la pesanteur est à Paris représentée par le nombre 980,96; dans les calculs on admet qu'elle est de 981 *unités d'accélération*.

Cette expression numérique change avec les unités d'après la formule (2); le rapport des valeurs numériques d'une accélération est égal au rapport inverse des grandeurs des unités de longueur et au rapport direct des carrés des grandeurs des unités de temps employées.

Dans l'hypothèse d'une décimalisation du temps dans laquelle le jour serait divisé en 10 intervalles égaux remplaçant les heures, chacun d'eux étant divisé en 100 parties égales remplaçant les minutes, et enfin chacune de ces parties étant divisée en 100 parties remplaçant les secondes, l'expression numérique γ de l'accélération à Paris, en conservant le centimètre comme unité de longueur, se calculerait de la façon suivante : la seconde est la $\left(\frac{1}{24 \times 3600}\right)^e = \left(\frac{1}{86\,400}\right)^e$ partie du jour; la nouvelle unité en serait la $\left(\frac{1}{10 \times 10^4}\right)^e = \left(\frac{1}{100\,000}\right)^e$ partie; le rapport de la nouvelle unité de temps θ à l'ancienne 1^{sec} est donc

$$\frac{\theta}{1^{sec}} = \frac{\frac{1}{100.000}}{\frac{1}{86\,400}} = \frac{86\,400}{100.000} = 0,864,$$

et, par suite, on a

$$\frac{\gamma}{980,96} = (0,864)^2,$$

et

$$\gamma = 732,28.$$

Les équations de la Géométrie jouissent de la propriété d'être homogènes relativement à la longueur; celles de la Cinématique ont la même propriété d'homogénéité, par rapport à la longueur et au temps dont les unités sont laissées arbitraires; tous les termes d'une équation de Cinématique doivent donc être de mêmes dimensions par rapport à L et à T.

Ainsi dans l'équation

$$(1) \qquad x = a + bt + ct^2,$$

dans laquelle x représente un espace et t un temps, a représente nécessairement un espace x_0, b est une vitesse $v_0 = LT^{-1}$ et c une accélération $\frac{1}{2}\gamma = LT^{-2}$, on a en effet, si ces conditions sont remplies, en exprimant tout en fonction des unités fondamentales,

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2, \tag{2}$$

équation qui est bien homogène, car chaque terme x, x_0, $v_0 t$, $\frac{1}{2}\gamma t^2$, a finalement pour dimensions L.

La forme (2) a donc sur la forme (1) l'avantage de rappeler la signification physique de chacune des constantes et en même temps de faciliter la vérification des conditions d'homogénéité.

La vitesse et l'accélération angulaires n'ont pas les mêmes dimensions que la vitesse et l'accélération ordinaires; il résulte de leurs définitions (27) que leurs symboles sont L^0T^{-1} et L^0T^{-2}.

Force. — La *force* est le produit d'une masse par une accélération; ses dimensions sont représentées par l'équation symbolique

$$F = LMT^{-2}.$$

Ces dimensions sont donc celles de l'unité de poids.

Dans le système C.G.S., l'équation de Newton

$$F = K\frac{MM'}{R^2},$$

donnant l'attraction d'une masse M sur une masse M' à la distance R, contient un facteur K dont on peut calculer les dimensions en remplaçant F, M et R par leurs dimensions respectives; on trouve ainsi

$$K = L^3M^{-1}T^{-2}.$$

Ce n'est donc pas un simple facteur numérique, mais bien une grandeur physique.

55. Homogénéité dans le système d'unités : longueur, force, temps. — Dans ce système les dimensions de la vitesse et de l'accélération sont les mêmes que précédemment.

La force représentée par le symbole F sera de dimension *un* en force, *zéro* en longueur et *zéro* en temps.

La masse, d'après la relation fondamentale

$$F = m\gamma,$$

est donnée par le quotient

$$m = \frac{F}{\gamma}$$

et en remplaçant γ par le symbole LT^{-2} de ses dimensions, on écrit

$$m = L^{-1}FT^{2}.$$

56. Champ de force. Lignes de force. — La pesanteur, qui sollicite tous les corps à tomber vers le centre de la Terre, et qui les fait tomber à sa surface lorsqu'aucun obstacle ne s'oppose à leur chute, est l'exemple le plus classique d'une force.

Un espace semblable à celui qui environne la Terre, et dans lequel toute masse pesante est soumise à l'action d'une force, s'appelle un *champ de force*.

Pareillement, l'espace qui entoure un aimant, et dans lequel un morceau de fer est sollicité par une force attractive, s'appelle un *champ de force magnétique;* de même enfin, une sphère électrisée produira, autour d'elle, un *champ de force électrique* tel que toute masse électrique abandonnée à elle-même se déplacera sous l'effet d'une force attractive ou répulsive.

En donnant cette définition, on ne se préoccupe pas de la cause qui peut donner naissance à un champ, et l'on suppose, en outre, que l'introduction de la masse pesante, du morceau

de fer, de la masse électrique qui sert à étudier théoriquement le champ, n'y apporte aucune perturbation.

La force qui, en un point du champ, sollicite l'unité de masse mesure l'*intensité du champ;* la direction de cette force est la *direction du champ.*

L'*unité de champ,* dans le système C.G.S., sera donc un champ tel que, agissant sur l'unité de masse, la force exercée soit égale à une dyne, et cette définition peut s'appliquer au champ de la pesanteur, au champ magnétique ou au champ électrique.

Les *lignes de force* sont des courbes qui, en tous leurs points, sont tangentes (*fig.* 54) à la direction du champ.

Fig. 54.

On appelle *surfaces de niveau* des surfaces qui sont, en tous leurs points, normales à la ligne de force qui passe par ce point.

On appelle *champ uniforme* un champ dans lequel l'intensité et la direction sont constantes; dans un tel champ les lignes de force sont des droites parallèles et les surfaces de niveau sont des plans parallèles entre eux et perpendiculaires aux lignes de force.

57. Champ de la pesanteur. — D'après la définition du champ on voit que, dans le cas de la pesanteur, l'*intensité du champ* et l'*accélération* du mouvement que prendrait une masse pesante abandonnée dans le champ sont des grandeurs de même nature.

En effet, supposons dans un champ uniforme d'intensité h une masse m; la force qui la sollicite est

$$f = mh;$$

mais d'autre part, si l'on appelle γ l'accélération du mouvement, uniformément accéléré, qu'elle prend dans le champ,

on a aussi

$$f = m\gamma.$$

γ et h ont donc la même valeur numérique; les unités qui leur servent de mesure ont mêmes dimensions; en effet, dans le système C. G. S., par exemple, on a par définition de l'accélération

$$\gamma = \frac{v}{t} = LT^{-2}$$

et par définition de l'intensité du champ

$$h = \frac{f}{m} = \frac{LMT^{-2}}{M} = LT^{-2}.$$

L'intensité du champ de la pesanteur, à Paris, est donc de 981 *dynes par gramme-masse* et l'on peut la représenter par la même lettre g que l'accélération.

Dans le cas particulier de la pesanteur, les lignes de force sont données en chaque point par la direction du *fil à plomb* en ce point. La ligne de force, qui passe par chaque lieu de la Terre, se confond donc, par définition, avec la *verticale du lieu*.

On démontre, dans la théorie de l'attraction, que le champ de la pesanteur à l'extérieur de la Terre est sensiblement le même que si toute la masse de la Terre était concentrée en son centre; dans ces conditions les surfaces de niveau sont, théoriquement, des sphères concentriques.

Si l'on considère deux points de la Terre très voisins, les lignes de force y sont sensiblement parallèles, et les portions de surfaces de niveau dans le voisinage de ces points sont des plans parallèles à la *surface des eaux tranquilles* et perpendiculaires, par conséquent, à la verticale du lieu.

Dans un faible espace, tel que le volume d'une salle de peu de hauteur, le champ est sensiblement uniforme; la pesanteur peut donc, dans ces conditions, servir d'exemple de *force constante*.

On peut se rendre compte exactement de l'approximation que l'on fait en supposant le champ terrestre uniforme dans une certaine étendue.

1° Nous admettons, par exemple, que la direction du champ est constante à Paris.

Soient deux points A et B à distance d (*fig.* 55); l'angle α des normales est donné en secondes par l'équation

$$\frac{d}{2\pi R} = \frac{\alpha}{360 \times 60 \times 60},$$

R étant le rayon de la Terre.

Supposons

$$R = 6000000^m, \quad d = 1000^m \quad \text{et} \quad 2\pi = 6 \text{ (appr.)};$$

on a

$$\alpha = \frac{360\, d \times 60^2}{2\pi R} = \frac{3,6 \times 60^2 \times 10^5}{6 \times 6 \times 10^6} = 36''.$$

Ces normales font donc, en réalité, un angle de 36″.

2° Nous admettons aussi que, dans une même salle l'intensité du champ est constante; or elle varie en raison inverse du carré de la distance au centre; soit g sa valeur à distance R du centre, $g_1 = g - dg$ cette intensité à distance $R + h$. On a, et c'est la loi de Newton,

$$\frac{g - dg}{g} = \frac{R^2}{(R + h)^2},$$

d'où, en négligeant h^2 et divisant par R,

$$\frac{dg}{g} = \frac{2Rh + h^2}{R^2 + 2Rh + h^2} = \frac{2h}{R + 2h}$$

et enfin en négligeant, au dénominateur, $2h$ vis-à-vis de R,

$$\frac{dg}{g} = \frac{2h}{R}.$$

Supposons un corps transporté du pied au sommet de la Tour Eiffel; on a

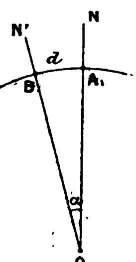
$$R = 6^m \times 10^6, \qquad h = 3^m \times 10^2,$$

donc

$$\frac{dg}{g} = \frac{2 \times 3 \times 10^2}{6.10^6} = 10^{-4}.$$

Si donc nous transportons un poids de 1^{kg} du pied au sommet de la tour, son poids absolu aura diminué de $0^{gr},1$; d'après cela, sa perte est de $0^{gr},001$ par 3^m.

Fig. 55.



Ce fait est facilement susceptible de vérification expérimentale; c'est l'expérience de M. von Jolly.

Une balance sensible au $\frac{1}{10}$ de milligramme est placée au premier étage d'une maison, un fil est suspendu sous le plateau de droite, traverse librement le plancher et aboutit près du sol du rez-de-chaussée. On place sur le plateau de droite un poids de 1^{kg} qu'on équilibre avec de la tare, le fil pendant librement. Cela fait, on enlève le poids du plateau de la balance et on le porte au rez-de-chaussée, où on l'accroche à l'extrémité inférieure du fil; on constate que, la différence de hauteur des deux positions du poids étant de 3^m, la balance accuse une augmentation de 1^{mgr} dans le poids apparent du corps pesé.

Cette expérience avait été imaginée au XVIIe siècle par le P. Ximénès, qui ne l'avait pas réalisée.

La pesanteur est donc, en réalité, un exemple de force variable, mais on comprend quelles difficultés ces considérations, sur ses changements de direction et d'intensité, entraîneraient dans l'étude des lois de la chute des corps ou dans l'étude de la trajectoire des projectiles, pour ne citer que ces deux exemples.

58. Figuration des champs. — L'intensité en un point d'un champ est figurée par un vecteur; on donne une représentation complète du champ par ses lignes de force et par ses surfaces de niveau.

Fig. 56.

Supposons, par exemple, une masse attractive en P; les lignes de force du champ qu'elle crée autour d'elle sont des droites qui *concourent* en P (*fig.* 56); des flèches en indiquent le sens; les surfaces de niveau sont des sphères concentriques.

Si la masse est répulsive, les lignes de force sont des droites qui *émanent* de P.

Il est facile de tracer les lignes de force du champ produit par deux masses dont l'une serait attractive, l'autre répul-

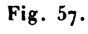
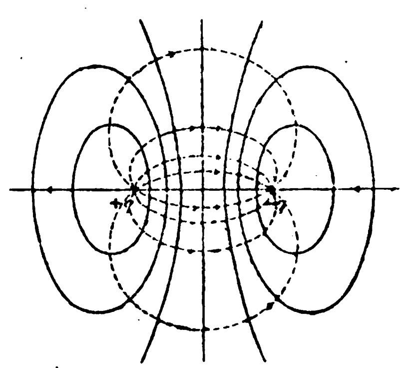


Fig. 57.

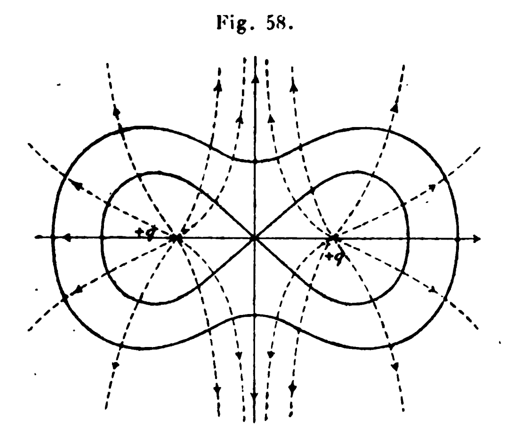


sive, chacune d'elles agissant suivant la loi de la raison inverse du carré des distances. Si $-q$ est un centre attractif, $+q$ un centre répulsif, les lignes de force tracées sur la *fig.* 57 en pointillé entrent par $-q$, pour sortir par $+q$; la

forme de ces courbes peut être déterminée en chaque point par la direction de l'intensité du champ, et celle-ci s'obtient facilement, puisque ces grandeurs sont des vecteurs de même nature que les accélérations et qui, par suite, se composent comme elles. Les surfaces de niveau sont figurées en traits pleins; leur forme résulte de leur définition, elles coupent les lignes de force à angle droit.

La *fig.* 58 montre le champ résultant de la présence de

Fig. 58.



deux masses répulsives, agissant en raison inverse du carré de la distance, où les lignes de force sont en pointillé et les surfaces de niveau en traits pleins.

59. Équations du mouvement d'un point sous l'action d'une force. — Soit un point matériel de masse m en mouvement sous l'action d'une force. A l'instant t le point possède une accélération γ ayant pour projections

$$(\gamma) \qquad \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

et il est sollicité par la force F ayant pour projections

$$(\mathrm{F}) \qquad \mathrm{X}, \quad \mathrm{Y}, \quad \mathrm{Z},$$

Dans l'espace le vecteur F est égal au vecteur γ multiplié par m; la projection de F sur un axe est donc égale à celle de γ multipliée par m. Appliquant ce théorème aux trois axes, on a les trois équations

$$(1) \qquad X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z = m\frac{d^2z}{dt^2};$$

qu'on appelle les *équations du mouvement*. Ce sont ces équations que l'on emploie ordinairement pour résoudre les deux problèmes suivants.

1° **Étant données la masse d'un point et les projections de son mouvement, trouver la force qui le sollicite.**

On suppose connues les coordonnées x, y, z du mobile en fonction du temps

$$(2) \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t);$$

on peut alors calculer les dérivées secondes

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f''(t), \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi''(t), \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \psi''(t);$$

et les équations du mouvement deviendront

$$(3) \qquad X = mf''(t), \qquad Y = m\varphi''(t), \qquad Z = m\psi''(t).$$

On connaîtra donc à chaque instant la force appliquée au point. En se servant des formules (2) qui lient x, y, z à t, on pourra chercher à exprimer X, Y, Z en fonction des coordonnées, c'est-à-dire chercher à déterminer la force en fonction de la position.

Exemple. — Prenons, par exemple, le mouvement vibratoire défini par les trois équations

$$x = a\cos(\omega t + \alpha),$$
$$y = b\cos(\omega t + \beta),$$
$$z = c\cos(\omega t + \gamma),$$

ω, a, b, c, α, β, γ étant des constantes. On a de suite pour les projections de la force

$$X = -m\omega^2 a \cos(\omega t + \alpha),$$
$$Y = -m\omega^2 b \cos(\omega t + \beta),$$
$$Z = -m\omega^2 c \cos(\omega t + \gamma),$$

on a ainsi la force à chaque instant; mais on peut écrire aussi

$$X = -m\omega^2 x, \qquad Y = -m\omega^2 y, \qquad Z = -m\omega^2 z;$$

et l'on a la force pour chaque position du point matériel. Ces dernières formules montrent que la force est dirigée de M vers O et égale au produit de la distance OM par la constante $m\omega^2$; on peut donc dire que le point considéré est attiré par l'origine proportionnellement à la distance.

2° Problème inverse : Connaissant la loi de la force qui agit sur un point matériel et les conditions initiales dans lesquelles le point est placé, trouver son mouvement.

Les *conditions initiales* sont : 1° la position que possède le point à l'instant où le mouvement commence; 2° la vitesse du point à cet instant. Ces conditions initiales sont à la volonté de l'expérimentateur; elles sont donc arbitraires. Supposons, par exemple, qu'on veuille étudier le mouvement d'une pierre sous l'action de la pesanteur; chacun sait que ce mouvement varie suivant la façon dont la pierre est lancée au départ. L'expérimentateur qui tient la pierre à la main pour la lancer peut, à l'instant où il la lance, lui donner la position qu'il veut et lui imprimer la vitesse qu'il veut : en d'autres termes, il peut la placer dans des conditions initiales arbitraires. Une fois ces conditions choisies, c'est-à-dire une fois la pierre lancée, son mouvement est entièrement déterminé par l'action de la pesanteur. C'est précisément en disposant de ces conditions initiales qu'on arrive, avec un projectile, à atteindre un but déterminé.

Un fait analogue a lieu pour tous les problèmes dans lesquels on cherche le mouvement d'un point sous l'action d'une force donnée. On peut placer le point dans des conditions initiales arbitraires; mais, une fois ces conditions choisies, le mouvement est entièrement déterminé.

Analytiquement, on résoudra ce problème à l'aide des équations du mouvement (1) dans lesquelles la loi de la force X, Y, Z est donnée. En outre, les conditions initiales sont supposées connues; à l'instant initial $t = t_0$, le mobile devra occuper une position donnée arbitrairement ayant pour coordonnées x_0, y_0, z_0, et il devra avoir une vitesse V_0 donnée arbitrairement ayant pour projections des quantités x'_0, y'_0, z'_0.

Il faudra alors, pour obtenir le mouvement correspondant du point, trouver des expressions de x, y, z en fonction de t, vérifiant les équations du mouvement (1), de telle façon que pour $t = t_0$ ces expressions prennent des valeurs x_0, y_0, z_0 données à l'avance et que leurs dérivées par rapport à t (projections de la vitesse) prennent, également pour $t = t_0$, des valeurs données x'_0, y'_0, z'_0.

La détermination effective de ces expressions de x, y, z en fonction du temps s'appelle l'*intégration* des équations du mouvement. Nous allons l'effectuer dans quelques cas particulièrement importants.

Il peut se faire que le mobile reste dans un plan, celui des xy, par exemple; alors les équations du mouvement se réduisent à deux,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

et il faut trouver pour x et y des fonctions de t vérifiant ces équations, se réduisant à des valeurs données x_0, y_0, pour $t = t_0$ et telles que leurs dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ prennent des valeurs données x'_0, y'_0 pour $t = t_0$.

Enfin, dans des cas encore plus particuliers, le point peut rester sur une droite fixe (mouvement rectiligne). On a alors, en prenant cette droite pour axe Ox, une seule équation

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

et il faut trouver pour x une fonction de t vérifiant cette équation, se réduisant à x_0 pour $t = t_0$ et telle que sa dérivée $\frac{dx}{dt}$ prenne une valeur donnée x'_0 pour $t = t_0$.

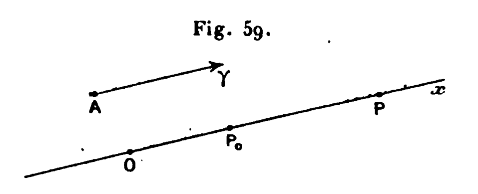
60. Mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force constante. — Imaginons un point matériel de masse m soumis à une force *constante*, c'est-à-dire à une force dont la grandeur, la direction et le sens sont invariables. Appelons $m\gamma$ l'intensité de cette force; nous pourrons dire que le point est mobile dans un champ d'intensité constante γ. La pesanteur, dans une petite étendue, offre l'exemple le plus simple d'un champ de cette nature. Le problème que nous allons traiter est donc analogue à l'étude du mouvement d'un point pesant dans le vide sous l'action de son seul poids; dans ce dernier problème, la direction du champ est la verticale descendante et γ est égal à l'intensité g du champ de la pesanteur au lieu considéré.

Le mobile, quelles que soient les conditions initiales, prendra un mouvement dans lequel l'accélération sera en grandeur, direction et sens, égale à γ.

Deux cas sont à distinguer suivant la nature des conditions initiales : 1° le point est lancé suivant la direction du champ, dans le sens du champ ou en sens contraire; le point décrit alors une portion de droite parallèle à la direction du champ; son mouvement est rectiligne et uniformément accéléré ou retardé; 2° le point est lancé dans une direction quelconque différente de celle du champ; il décrit alors, comme nous le verrons, une portion de parabole dont l'axe est parallèle à la direction du champ.

Premier cas : Mouvement rectiligne. — Le mobile étant placé dans une position P_0, on lui donne une vitesse initiale dirigée suivant la direction constante du champ. Il est évident, par raison de symétrie, que le mobile décrit une portion de la parallèle P_0x à la direction γ du champ. Prenons, sur cette parallèle (*fig.* 59) un point fixe O comme origine des espaces et comme sens positif Ox le sens du champ. Dans ces conditions, la valeur algébrique X de la force appliquée au point est $X = m\gamma$, puisqu'elle est dirigée dans le sens positif. Dès lors, les équations du mouvement se réduisent à l'équation unique

Fig. 59.



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\gamma,$$

les deux autres équations du mouvement (1) étant identiquement satisfaites, car y, z, Y, Z sont nuls.

Comptons les temps à partir de l'instant initial, de façon que pour $t = 0$ le mobile soit au point P_0 d'abscisse x_0; appelons v_0 la valeur algébrique de la vitesse initiale estimée positivement dans le sens Ox; v_0 sera positif ou négatif suivant que le mobile sera lancé dans le sens du champ ou en sens contraire.

En divisant par m, on écrit l'équation du mouvement

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \gamma.$$

Le premier membre est la dérivée de $\frac{dx}{dt}$, le deuxième de γt; ces deux fonctions ayant même dérivée diffèrent par une constante; on a donc

$$\frac{dx}{dt} = v = \gamma t + k,$$

la constante k est égale à v_0 puisque pour $t = 0$ on a

$$v = v_0,$$

donc

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \gamma t = v; \tag{2}$$

le premier membre est la dérivée de x par rapport à t et le second membre est la dérivée de $v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$ par rapport à la même variable; on a donc

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2 + k',$$

la constante k' est égale à x_0, puisque pour $t = 0$ on a

$$x = x_0;$$

l'équation du mouvement est donc

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2; \tag{3}$$

c'est l'équation du mouvement uniformément varié étudié précédemment (n° 12).

1° Si la vitesse initiale v_0 est *positive* ou *nulle* (c'est le cas d'un point pesant lancé vers le bas ou abandonné à lui-même), v et x augmentent constamment et indéfiniment; le mouvement est uniformément accéléré;

2° Si v_0 est *négatif* (c'est le cas d'un point pesant lancé vers le haut), le mouvement est d'abord uniformément retardé : la vitesse v, d'abord négative, diminue en valeur absolue et s'annule au bout du temps $t_1 = -\frac{v_0}{\gamma}$.

Dans cette première période, x va en diminuant, le mobile s'éloigne de P_0 dans le sens contraire à celui du champ et à l'instant t_1 arrive à son élongation maximum P_1 avec une vitesse nulle. A partir de ce moment, le mobile se trouve dans les mêmes conditions que s'il était abandonné sans vitesse en

P_1 : il revient en sens contraire d'un mouvement uniformément accéléré.

Relation entre la variation de vitesse et le chemin parcouru. — En éliminant t entre les équations (2) et (3), on a

$$v^2 - v_0^2 = 2\gamma(x - x_0), \tag{4}$$

qui donne la variation du carré de la vitesse en fonction du chemin positif ou négatif $x - x_0$ parcouru depuis la position initiale. Cette équation résolue par rapport à v

$$v = \pm\sqrt{v_0^2 + 2\gamma(x - x_0)}$$

montre que, lorsque le mobile passe par une position déterminée, sa vitesse est la même en valeur absolue, qu'il marche dans le sens du champ ou en sens contraire : il repasse alors par une même surface de niveau ; en particulier, pour $x = x_0$, v prend les valeurs $+v_0$ et $-v_0$; *le corps repasse donc au point d'où on l'a lancé avec une vitesse égale et de signe contraire à celle qu'on lui avait donnée.*

Ce sont bien là les faits d'expérience qui résultent de l'observation du mouvement qu'imprime la pesanteur à un corps lancé de bas en haut suivant la verticale avec une vitesse v_0. Dans ce cas particulier, pour pouvoir appliquer les équations précédentes, on prend la verticale dans le sens de haut en bas et on remplace γ par g.

En remarquant qu'un instant quelconque du mouvement peut être considéré comme instant initial, on peut énoncer la relation (4) de la façon suivante :

La variation du carré de la vitesse, lorsque le mobile passe d'une position quelconque P_0 *à une autre position* P, *est égale au produit de* 2γ *par la valeur algébrique* P_0P *du chemin parcouru estimé positivement dans le sens du champ.*

Par exemple, dans le cas de la pesanteur, le chemin parcouru doit être estimé positivement vers le bas.

Comme application, cherchons la vitesse acquise par un point pesant abandonné à lui-même dans une position P_0 et tombant d'une hauteur h : on aura

$$v_0 = 0, \qquad x - x_0 = h.$$

$$(5) \qquad v^2 = 2gh.$$

Inversement, cherchons la hauteur h à laquelle s'élève un point matériel lancé vers le haut avec une vitesse v_0 ; dans ce cas, la vitesse initiale est v_0 ; la vitesse v, au moment où le mobile arrive au point le plus haut P_1, est zéro ; le chemin parcouru P_0P_1, estimé positivement vers le bas, est $-h$ et l'on a

$$(6) \qquad -v_0^2 = -2gh, \qquad h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Le point retombe ensuite et quand il repasse au point de départ il possède la vitesse v_0, ainsi qu'il résulte d'une remarque précédente. On le vérifie immédiatement à l'aide des formules actuelles, car le mobile étant monté à la hauteur $h = \frac{v_0^2}{2g}$, quand il retombe ensuite de cette même hauteur il prend d'après (5) la vitesse $v^2 = 2gh$, d'où $v^2 = v_0^2$. Cette équation $(v - v_0)(v + v_0) = 0$ comporte deux solutions, dont l'une correspond à l'instant initial et l'autre à l'époque où le mobile passe au point d'où on l'a lancé.

Donc *la hauteur à laquelle s'élève un mobile pesant lancé de bas en haut suivant la verticale avec une vitesse v_0 est telle que, si le corps tombait sans vitesse initiale de cette même hauteur, il prendrait précisément cette même vitesse v_0.*

L'équation (4) peut d'ailleurs être obtenue directement en dirigeant autrement les calculs ; multiplions les deux termes de l'égalité (1) par $2\frac{dx}{dt}$

$$2\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} = 2\gamma\frac{dx}{dt}.$$

Le premier membre est la dérivée de $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ et le second celle de $2\gamma x$; on a donc

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\gamma x + k;$$

k est déterminé par les conditions $x = x_0$, $v = v_0$ à l'instant initial; d'où

$$k = v_0^2 - 2\gamma x_0$$

et

$$v^2 - v_0^2 = 2\gamma(x - x_0).$$

Second cas; mouvement curviligne. — Nous supposerons maintenant le mobile lancé à l'instant $t = 0$ dans une direction oblique par rapport à celle du champ avec une vitesse v_0. Un premier fait, évident par raison de symétrie, est que la trajectoire est dans le plan mené par v_0 parallèlement à la direction du champ; par exemple, pour un point pesant, elle est dans le plan vertical mené par v_0.

On peut vérifier ce fait par le calcul; en effet, prenons un axe Oy parallèle à la direction du champ; les projections de la force sur les axes Ox et Oz seront nulles,

$$X = 0, \qquad Z = 0.$$

Les équations du mouvement donnent alors

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

on en déduit que $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ sont constantes,

$$\frac{dx}{dt} = A, \qquad \frac{dz}{dt} = C.$$

Ces équations signifient que, dans toute la durée du mouvement, les projections de la vitesse sur Ox et Oz sont constantes. Les quantités A et C sont donc les projections de la vitesse initiale v_0 sur ces axes.

Les deux membres de la première des équations précédentes sont les dérivées de x et At; on a donc

$$x = At + x_0,$$

x_0 désignant une constante égale à l'abscisse du point à l'instant 0; on a de même

$$z = Ct + z_0,$$

d'où, en éliminant t,

$$C(x - x_0) - A(z - z_0) = 0.$$

C'est l'équation d'un plan fixe parallèle à Oy et contenant la vitesse initiale. Le mobile reste dans ce plan puisque, quel que soit t, les coordonnées du mobile vérifient l'équation de ce plan.

Ceci posé, il reste à trouver les équations du mouvement dans ce plan; c'est ce que nous allons faire en prenant, pour fixer les idées, le champ de la pesanteur.

Prenons, pour origine O, la position initiale du mobile, pour axe Oy la verticale dirigée vers le haut (en sens contraire du champ) et pour axe Ox l'horizontale du plan qui contient la vitesse initiale, c'est-à-dire du plan de la trajectoire, prise positivement de façon à faire un angle aigu avec la direction de la vitesse initiale. On aura

$$X = 0, \qquad Y = -mg$$

et les équations du mouvement seront

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg.$$

Appelons α l'angle de la vitesse initiale OV_0 avec Ox, cet angle étant considéré comme positif quand la vitesse est au-dessus de Ox (cas de la figure 60) et comme négatif quand il est au-dessous. Les projections de la vitesse initiale sur les

axes seront

$$v_0 \cos\alpha, \quad v_0 \sin\alpha;$$

les coordonnées initiales du mobile sont

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

La première des équations du mouvement montre que $\frac{dx}{dt}$ est constant et égal à la projection de la vitesse initiale sur Ox : on a donc

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha,$$

$$(2) \qquad x = v_0 t \cos\alpha;$$

la deuxième équation donne de même

$$(1') \qquad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha,$$

$$(2') \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha.$$

Les équations (1), (1′) donnent la vitesse

$$(3) \qquad v^2 = v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2 = v_0^2 - 2gy;$$

la *valeur numérique* de la vitesse à chaque instant est la même que si le mobile tombait sans vitesse initiale de la hauteur $\frac{v_0^2}{2g}$ à la hauteur y.

Entre les équations (2), (2′), éliminons le temps; nous obtenons l'équation de la trajectoire

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + x \operatorname{tang}\alpha.$$

C'est une parabole d'axe verticale (*fig.* 60) qui tourne sa concavité vers le bas, car le coefficient de x^2 est négatif.

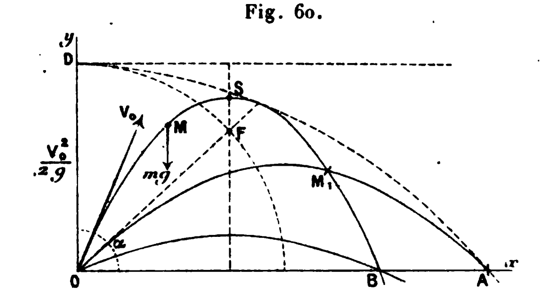
Si α était négatif, $\frac{dy}{dt}$ serait, d'après (1′), toujours négatif, donc y irait constamment en décroissant et le mobile ne passerait pas par le sommet de la parabole.

Supposons maintenant $\alpha > 0$, $\frac{dy}{dt}$ commence par être positif et le mobile monte; il monte jusqu'à ce que $\frac{dy}{dt}$ s'annule; ce qui se produira au bout d'un temps t' donné par l'équation

$$-gt' + v_0 \sin\alpha = 0, \qquad t' = \frac{v_0 \sin\alpha}{g};$$

le mobile étant arrivé à sa hauteur maximum, sa vitesse est

Fig. 60.



minimum en vertu de la relation (3). Les coordonnées du point le plus haut S, sommet de la parabole, seront

$$x' = v_0 t' \cos\alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g},$$

$$y' = -\frac{gt'^2}{2} + v_0 t' \sin\alpha = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha.$$

Après cet instant t', $\frac{dy}{dt}$ devient négatif et le mobile redescend. Lorsqu'il repasse à la même hauteur, la valeur numérique de la vitesse redevient la même. En particulier, il repasse au point A au niveau de O avec la vitesse v_0. La portée horizontale OA est double de l'abscisse x' du sommet

$$OA = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Pour que OA soit le plus grand possible avec une vitesse

initiale donnée, il faudra que $\sin 2\alpha$ soit maximum, c'est-à-dire que α soit égal à $\frac{\pi}{4}$. Supposons que l'on veuille atteindre un point B de Ox d'une abscisse moindre que $\frac{v_0^2}{g}$, l'inclinaison du tir sera donnée par

$$\sin 2\alpha = \frac{g}{v_0^2}\,\mathrm{OB}.$$

On voit qu'il y a deux solutions également distantes de $\frac{\pi}{4}$. On atteindra donc le point B par deux paraboles ; on verrait aisément que c'est par la parabole inférieure qu'on y arrive dans le temps le plus court.

On peut déterminer géométriquement la position de la parabole correspondant à un angle donné α ; pour cela, nous allons d'abord établir que toutes les paraboles obtenues en faisant varier α ont pour directrice la droite D,

$$y = \frac{v_0^2}{2g}.$$

En effet, le paramètre de la parabole décrite par le mobile est

$$p = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g};$$

l'ordonnée du sommet étant $y' = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$, l'équation de la directrice sera

$$y = y' + \frac{p}{2} = \frac{v_0^2}{2g};$$

C'est donc bien la droite D située à la hauteur à laquelle monterait le point s'il était lancé verticalement avec la vitesse v_0.

Cela posé, supposons donnée la tangente à l'origine Ov_0 ; le foyer devra se trouver sur la droite OF telle que Ov_0 soit bissectrice de l'angle FOD ; il devra aussi se trouver sur le

cercle décrit de O comme centre avec OD comme rayon; il est donc à l'intersection de ces deux lignes.

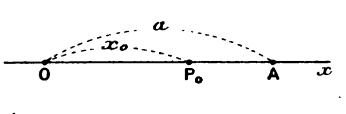
On peut, comme exercice, en supposant v_0 donné, chercher sous quel angle α il faut lancer le projectile pour atteindre un point déterminé M_1 du plan. On trouve que, pour que l'on puisse atteindre le point M_1, il faut qu'il soit à l'intérieur de la parabole ayant pour foyer O et pour sommet le point D; cette parabole, tracée en traits ponctués sur la figure, s'appelle la *parabole de sûreté;* elle est l'enveloppe des trajectoires obtenues en laissant v_0 constant et faisant varier α.

61. Mouvement d'un point attiré ou repoussé par un centre fixe O proportionnellement à la distance. — Soit P_0 la position initiale du mobile; deux cas sont à distinguer suivant que la vitesse initiale est : soit nulle, soit dirigée suivant OP_0 dans un sens arbitraire, ou suivant qu'elle fait avec OP_0 un angle différent de zéro.

Dans le premier cas, il est évident que, par raison de symétrie, le point restera sur la droite OP_0 et que son mouvement sera rectiligne. Dans le deuxième cas, son mouvement sera curviligne. Nous étudierons d'abord le cas simple du mouvement rectiligne.

Mouvement rectiligne; cas de l'attraction. — Prenons pour origine le point attirant O et pour axe Ox la droite décrite par le point. Appelons x_0 l'abscisse initiale et v_0 la valeur algébrique de la vitesse initiale (*fig.* 61).

Fig. 61.



Soit à l'instant t, x l'abscisse du mobile P, la force F appliquée au mobile est dirigée dans le sens PO et proportionnelle à la distance OP; sa valeur algébrique X est donc de signe contraire à x et

proportionnelle à x, et l'on a

$$X = -K^2 x,$$

K^2 étant une constante. L'équation du mouvement est donc

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -K^2 x$$

et en posant

$$\frac{K^2}{m} = \omega^2.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

Cette équation convient, que le point mobile soit à droite ou à gauche du centre attractif O.

Multiplions les deux membres de cette égalité par $2\frac{dx}{dt}$,

$$2\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} = -2\omega^2 x\frac{dx}{dt}.$$

Le premier membre est la dérivée de $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, le second est celle de $-\omega^2 x^2$; ces deux fonctions primitives ne diffèrent que par une constante k, puisque leurs dérivées sont égales; on a donc

$$(1) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\omega^2 x^2 + h.$$

Or $\frac{dx}{dt}$ est la valeur algébrique v de la vitesse; à l'instant initial, $x = x_0$, $v = v_0$; on a donc, pour déterminer h, l'équation

$$v_0^2 = -\omega^2 x_0^2 + h$$

qui donne pour h la valeur

$$h = v_0^2 + \omega^2 x_0^2.$$

h est une quantité essentiellement positive et supérieure à $\omega^2 x_0^2$: nous pourrons donc poser h égal à un carré $\omega^2 a^2$,

avec $a > x_0$. L'équation du mouvement s'écrit encore

$$(2)\quad v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2(a^2 - x^2), \qquad v = \frac{dx}{dt} = \pm\,\omega\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Si nous supposons le mobile lancé avec une vitesse initiale v_0 positive, il faudra prendre au début le signe $+$ devant le radical; lorsque x augmente, la vitesse diminue et s'annule au point A d'abscisse $x = a$.

A ce moment le point revient sous l'effet de la force attractive, et il faut prendre le signe — devant le radical qui donne v; le mobile, dans cette nouvelle phase, va jusqu'au point A', $x = -a$, où sa vitesse s'annule de nouveau, etc.

L'équation (2) peut s'écrire

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\frac{dx}{dt} = \omega;$$

le premier membre est la dérivée, par rapport à t, de arc sin $\frac{x}{a}$, le deuxième de ωt; on a donc

$$\arcsin\frac{x}{a} = \omega t + \alpha,$$

α étant une constante arbitraire; d'où

$$(3)\quad x = a\sin(\omega t + \alpha).$$

On a ainsi l'équation du mouvement.

C'est l'équation du mouvement vibratoire simple étudié au n° **13**.

Si l'on veut exprimer les constantes a et α en fonction des conditions initiales, on pourra compter le temps t à partir de l'instant initial; alors, pour $t = 0$ la fonction x doit prendre une valeur x_0, abscisse initiale, et sa dérivée $\frac{dx}{dt}$ une valeur x'_0 égale à la valeur algébrique v_0 de la vitesse initiale. On a donc

$$(4)\quad x_0 = a\sin\alpha, \qquad x'_0 = v_0 = a\omega\cos\alpha,$$

formules déterminant a et α.

Si l'on développe le $\sin(\omega t + \alpha)$, qui figure dans l'équation (3) du mouvement, on a

(5) $$x = a \sin\alpha \cos\omega t + a \cos\alpha \sin\omega t;$$

d'où, en vertu des relations (4),

(6) $$x = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t.$$

Durée d'une oscillation. — La durée d'une oscillation simple est le temps que met le mobile à aller de A en A'.

Or, à l'instant t_1,

$$\omega t_1 + \alpha = \frac{\pi}{2},$$

on a

$$x = a;$$

le mobile est au point A, et à l'instant t_2,

$$\omega t_2 + \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi,$$

on a

$$x = - a;$$

le mobile est en A' : la durée de l'oscillation simple est donc

$$t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\omega}.$$

Cette durée est indépendante des conditions initiales.

Le temps que met le mobile à aller de A en O est $\theta = \frac{\pi}{2\omega}$. En particulier, supposons que l'on abandonne le point sans vitesse initiale. Alors

$$v_0 = 0, \qquad x_0 = a, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

et l'équation du mouvement devient

$$x = x_0 \cos\omega t.$$

Le temps que met le mobile à arriver en O est

$$\theta = \frac{\pi}{2\omega};$$

il est indépendant de la distance à laquelle le point est abandonné sans vitesse; on exprime ce fait en disant que le mouvement est *tautochrone*.

Mouvement rectiligne; cas de la répulsion. — L'équation du mouvement est évidemment

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x.$$

Multiplions les deux membres par $2\frac{dx}{dt}$; il vient

$$2\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} = 2\omega^2 x \frac{dx}{dt}$$

et, par suite,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2 x^2 + h.$$

Si le mobile est placé au début en une position P_0 à distance x_0 du centre (*fig.* 62) et si nous le supposons animé d'une vitesse initiale v_0, nous avons

Fig. 62.

(7) $$v_0^2 = \omega^2 x_0^2 + h.$$

Actuellement h est, suivant les cas, positif, négatif ou nul. Posons $h = \omega^2\lambda$; nous pouvons écrire

$$\frac{dx}{dt} = \pm\,\omega\sqrt{x^2+\lambda}.$$

Nous allons exprimer x en fonction de t en supposant que l'on prenne le signe $+$; le calcul et les résultats seraient les mêmes avec le signe $-$.

On a alors

$$\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{x^2+\lambda}, \qquad x'_0 = v_0 = \omega\sqrt{x_0^2+\lambda};$$

en écrivant

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+\lambda}}\frac{dx}{dt} = \omega,$$

on voit que le premier membre est la dérivée de

$$\text{Log}(x+\sqrt{x^2+\lambda})$$

par rapport à t et le deuxième la dérivée de ωt. On a donc

$$\text{Log}(x+\sqrt{x^2+\lambda}) = \omega t + \alpha;$$

pour

$$t = 0, \qquad x = x_0,$$

donc

$$\text{Log}(x_0+\sqrt{x_0^2+\lambda}) = \alpha;$$

remplaçant α par cette valeur, on a

$$\text{Log}\frac{x+\sqrt{x^2+\lambda}}{x_0+\sqrt{x_0^2+\lambda}} = \omega t,$$

d'où, en passant des Logarithmes aux nombres,

$$x+\sqrt{x^2+\lambda} = (x_0+\sqrt{x_0^2+\lambda})e^{\omega t}.$$

De cette équation on déduit la suivante

$$x-\sqrt{x^2+\lambda} = (x_0-\sqrt{x_0^2+\lambda})e^{-\omega t};$$

en effet, en multipliant ces deux relations membre à membre, on a une identité.

En ajoutant ces deux relations, on a

$$x = x_0\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} + \sqrt{x_0^2+\lambda}\,\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}$$

c'est-à-dire, d'après la valeur ci-dessus de $x'_0 = v_0$,

$$(8)\qquad x = x_0 \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} + \frac{v_0}{\omega} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}.$$

Telle est l'équation du mouvement; il serait facile de vérifier que cette valeur de x satisfait à l'équation du mouvement et que pour $t = 0$ cette fonction se réduit à $x = x_0$ et sa dérivée à $x'_0 = v_0$, vitesse initiale.

La notation des sinus et cosinus hyperboliques fait ressortir l'analogie avec l'équation trouvée dans le cas d'une attraction proportionnelle à la distance; en effet, l'équation que nous venons de trouver peut s'écrire

$$x = x_0 \operatorname{ch} \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t,$$

entièrement analogue à l'équation étudiée au n° **14**.

Discussion. — Nous pourrons toujours supposer $x_0 > 0$; cela revient à choisir OP_0 comme sens positif de Ox. Supposons d'abord $v_0 > 0$; le mobile s'éloigne constamment du centre attractif et sa vitesse croît indéfiniment avec x. Supposons maintenant $v_0 < 0$; au début, la vitesse sera négative; il faudra donc prendre le signe — devant le radical. Supposons $h > 0$; à mesure que le point s'approche de O, sa vitesse diminue en valeur absolue jusqu'à $\sqrt{h}$; le mobile dépassera le point O avec cette vitesse et s'éloignera avec une vitesse indéfiniment croissante en valeur absolue. Si h est négatif, on peut poser $h = -\omega^2 a^2$ et l'on a

$$\frac{dx}{dt} = -\omega\sqrt{x^2 - a^2},$$

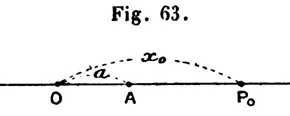
où a est nécessairement moindre que x_0, car pour $x = x_0$ la vitesse v_0 est réelle; le mobile arrivera donc au point A d'abscisse a (*fig.* 63), sa vitesse s'y annulera, changera de

signe et le mobile s'éloignera indéfiniment de A avec une vitesse toujours croissante. Il est intéressant d'étudier le cas intermédiaire $v_0 < 0$ et $h = 0$. Dans cette hypothèse on a

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\omega^2 x^2} = -\omega x.$$

La vitesse diminue constamment à mesure que le point se rapproche de l'origine, le mobile se rapproche indéfiniment du point O mais sans pouvoir l'atteindre dans un temps fini; ce temps peut, en effet, se déduire de la relation (1), qui s'écrit

Fig. 63.



$$\frac{dx}{x} = -\omega\, dt,$$

et par suite

$$\operatorname{Log} x = -\omega t + p;$$

la constante p est déterminée, puisque pour $x = x_0$ on a

$$t = 0;$$

par suite

$$p = \operatorname{Log} x_0,$$

et

$$(2) \qquad t = \frac{1}{\omega} \operatorname{Log} \frac{x_0}{x};$$

or cette expression croît indéfiniment lorsque x tend vers zéro.

Le point O se distingue par cette particularité que c'est une position d'équilibre instable; le mobile placé en O sans vitesse initiale resterait au repos; mais, si on l'écartait un peu, la répulsion l'écarterait indéfiniment; le plus souvent, lorsqu'un mobile s'approche d'une position d'équilibre instable avec une vitesse qui tend vers zéro, il s'approche indéfiniment de cette position sans jamais l'atteindre.

L'équation (2) peut s'écrire

$$x = x_0 e^{-\omega t},$$

c'est l'équation du mouvement; dans ce cas particulier, la loi des vitesses est alors

$$v = -\omega x_0 e^{-\omega t} = -\omega x$$

et la loi des accélérations

$$\gamma = \omega^2 x_0 e^{-\omega t} = \omega^2 x,$$

ce qui est bien conforme à l'hypothèse initiale.

On peut aussi déduire ce cas de l'équation générale (7); h étant nul, on a

$$v_0^2 = \omega^2 x_0^2.$$

Mais x_0 est supposé positif et v_0 négatif, donc $v_0 = -\omega x_0$; en portant cette valeur de v_0 dans (8) on aura

$$x = x_0 e^{-\omega t}.$$

Mouvement curviligne; cas de l'attraction. — Remarquons tout d'abord que, si un point est attiré ou repoussé par un centre fixe O *suivant une loi quelconque,* sa trajectoire est une courbe plane située dans le plan déterminé par O et la vitesse initiale. On peut regarder le fait comme évident par raison de symétrie; on peut aussi le vérifier par le calcul.

En effet, prenons le point O comme origine : la force appliquée au point mobile P de coordonnées x, y, z étant dirigée suivant OP, l'accélération du mobile est aussi dirigée suivant OP et les projections de l'accélération sont proportionnelles à celles de OP, c'est-à-dire à x, y, z; on a donc

$$\frac{\frac{d^2 x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2 y}{dt^2}}{y} = \frac{\frac{d^2 z}{dt^2}}{z};$$

on en déduit

$$(1)\quad \begin{cases} y\dfrac{d^2z}{dt^2} - z\dfrac{d^2y}{dt^2} = 0, \\ z\dfrac{d^2x}{dt^2} - x\dfrac{d^2z}{dt^2} = 0, \\ x\dfrac{d^2y}{dt^2} - y\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0. \end{cases}$$

Mais ces équations donnent les trois suivantes

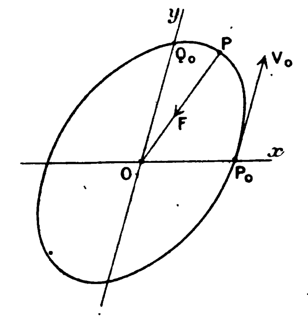
$$(2)\quad \begin{cases} y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt} = A, \\ z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt} = B, \\ x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt} = C, \end{cases}$$

A, B, C désignant des constantes, car le premier membre de chaque équation (1) est la dérivée par rapport à t du premier membre de l'équation correspondante (2). Ajoutons ces dernières équations après les avoir multipliées respectivement par x, y, z; nous aurons

$$0 = Ax + By + Cz,$$

équation d'un plan passant par l'origine; la trajectoire est donc dans un plan passant par O et, comme la vitesse initiale lui est tangente, elle est dans ce plan.

Fig. 64.



Cela posé, revenons à notre problème. Soit P_0 la position initiale du mobile, V_0 le vecteur vitesse initiale. Prenons pour axe Ox la droite OP_0 (*fig.* 64) et pour axe Oy une droite parallèle à V_0 et de même sens que V_0.

Le mobile étant en P est sollicité par une force F dirigée

suivant PO et égale à $K^2 OP$; ses projections X et Y sont donc égales aux projections x et y de OP changées de signes et multipliées par K^2 :

$$X = -K^2 x, \qquad Y = -K^2 y.$$

Les équations du mouvement sont donc

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -K^2 x, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -K^2 y,$$

ou, en faisant comme plus haut $\frac{K^2}{m} = \omega^2$,

$$(3) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y.$$

Il s'agit de trouver des fonctions x et y de t vérifiant ces équations et satisfaisant aux conditions initiales suivantes qui résultent du choix des axes. Comptons le temps t à partir de l'instant initial; alors pour $t = 0$ on doit avoir

$$x_0 = a, \qquad y_0 = 0,$$

a désignant la distance OP_0. En outre, la vitesse initiale étant parallèle à Oy, sa projection x'_0 sur Ox est nulle et sa projection y'_0 sur Oy est égale à $P_0V_0 = v_0$: les dérivées de x et de y par rapport à t prennent donc pour $t = 0$ les valeurs $x'_0 = 0$, $y'_0 = v_0$.

Or nous avons vu que la fonction x vérifiant la première des équations (3) de telle façon que pour $t = 0$ elle prenne une valeur x_0 et sa dérivée une valeur x'_0 est

$$x = x_0 \cos\omega t + \frac{x'_0}{\omega}\sin\omega t.$$

La deuxième des équations (3) est identique à la première, sauf le changement de x en y; la fonction y vérifiant cette équation de telle façon que pour $t = 0$ elle prenne une va-

leur y_0 et sa dérivée une valeur y'_0 est donc

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{y'_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Mais actuellement

$$x_0 = a, \quad y_0 = 0,$$
$$x'_0 = 0, \quad y'_0 = v_0.$$

Le mouvement demandé est donc défini par les formules

$$x = a \cos \omega t, \quad y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

La trajectoire est une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 \omega^2}{v_0^2} = 1,$$

rapportée à des diamètres conjugués; si l'on appelle b la longueur du demi-diamètre OQ_0 parallèle à la vitesse initiale, on a

(4) $$b = \frac{v_0}{\omega}, \quad v_0 = \omega b.$$

La durée de la révolution du point sur l'ellipse est la période qu'il faut ajouter à t pour que x et y, c'est-à-dire $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$, reprennent la même valeur; elle est donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Elle est indépendante des conditions initiales. Le cas du mouvement oscillatoire rectiligne apparaît alors comme le cas où cette ellipse est infiniment aplatie.

Comme un instant quelconque du mouvement peut être regardé comme initial, on voit que, le mobile étant dans une position quelconque P_0 sur l'ellipse qu'il décrit, pour avoir sa vitesse P_0V_0 en ce point il suffit de prendre le demi-diamètre OQ_0 conjugué de OP_0; la vitesse P_0V_0 est parallèle à OQ_0 et

égale à ωOP_0 [équation (4)]; la vitesse est donc maximum à l'extrémité du petit axe et minimum à l'extrémité du grand.

Mouvement curviligne d'un point repoussé par un centre fixe proportionnellement à la distance. — Prenons les mêmes axes que pour le problème précédent. Les équations du mouvement ont la même forme au changement de signe près qui provient du changement de sens de la force. On a donc

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2 y.$$

Les conditions initiales sont les mêmes : pour $t = 0$

$$(2) \qquad x_0 = a, \qquad y_0 = 0, \qquad x'_0 = 0, \qquad y'_0 = v_0.$$

Mais la fonction du temps vérifiant la première des équations (1) et prenant, ainsi que sa dérivée, des valeurs initiales x_0 et x'_0 est

$$x = x_0 \operatorname{ch} \omega t + \frac{x'_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t.$$

La seconde équation ayant même forme donne de même

$$y = y_0 \operatorname{ch} \omega t + \frac{y'_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t.$$

Actuellement, d'après les conditions initiales (2), on aura pour les équations du mouvement

$$x = a \operatorname{ch} \omega t, \qquad y = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t.$$

En éliminant t à l'aide de la relation

$$\operatorname{ch}^2 \omega t - \operatorname{sh}^2 \omega t = 1,$$

on a la trajectoire

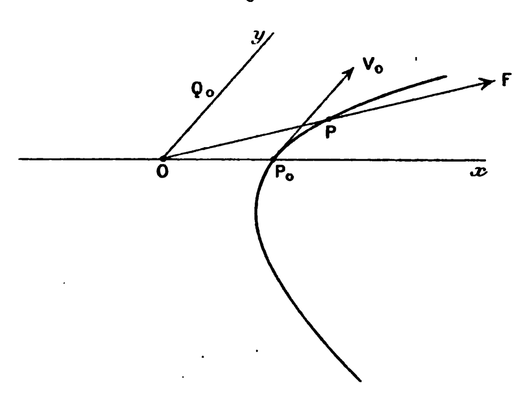
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 \omega^2}{v_0^2} = 1.$$

C'est une hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués (*fig.* 65),

$$OP_0 = a \quad \text{et} \quad OQ_0 = b = \frac{v_0}{\omega}.$$

Le mobile décrit une des branches de la courbe. La rela-


Fig. 65.



tion $v_0 = \omega b = \omega OQ_0$ s'interprète comme dans le cas de l'ellipse. Un instant quelconque pouvant être regardé comme initial, on voit que pour avoir la vitesse en un point P_0 il suffit de prendre le diamètre conjugué OQ_0 de OP_0; la vitesse est parallèle à OQ_0 et égale à $\omega.OQ_0$. Cette vitesse est minimum au sommet de l'hyperbole; elle augmente au delà de toute limite quand le point s'éloigne indéfiniment.

Le cas du mouvement rectiligne apparaît comme le cas où cette hyperbole serait infiniment aplatie.

62. **Vitesse aréolaire d'un point dans un plan.** — Soit un point M décrivant (*fig.* 66) une courbe plane. Joignons un point fixe O du plan au point M et considérons l'aire A du secteur M_0OM balayé par le rayon vecteur OM quand le mobile passe de la position initiale M_0 à la position M.

Cette aire est une fonction de t : la dérivée $\frac{dA}{dt}$ s'appelle *vitesse aréolaire du point.*

Prenons un axe polaire Ox et appelons r et θ les coordonnées polaires du point M à l'instant t. Quand t croît de Δt, le point prend la position M′ de coordonnées $r + \Delta r$ et $\theta + \Delta\theta$, l'aire A croît de :

Fig. 66.

$$\Delta A = \text{secteur MOM}'.$$

Décrivons de O comme centre les arcs de cercle MH et M′K de rayons respectifs r et $r + \Delta r$; l'aire ΔA est évidemment comprise entre les deux secteurs MOH, M′OK :

$$\frac{1}{2} r^2 \Delta\theta < \Delta A < \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\theta.$$

Divisons par Δt

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} < \frac{\Delta A}{\Delta t} < \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Quand Δt tend vers zéro, $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ tend vers la dérivée θ'_t ou $\frac{d\theta}{dt}$ de θ par rapport au temps, Δr tend vers zéro, et $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ tend vers la vitesse aréolaire $\frac{dA}{dt}$. On a donc

$$(1) \qquad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

En coordonnées cartésiennes, on a

$$(2) \qquad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right);$$

en effet,

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \theta = \text{arc tang} \frac{y}{x};$$

donc

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2+y^2};$$

en substituant dans (1) on a la nouvelle formule (2).

Théorème. — *Si l'accélération passe constamment par un point fixe* O, *la vitesse aréolaire autour du point, dans le plan de la trajectoire, est constante.*

En effet, supposons que l'accélération passe constamment par un point O pris pour origine. Les projections de l'accélération seront proportionnelles à celles de OM ; on aura donc

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y},$$

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Mais le premier membre de cette expression est la dérivée de

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$$

par rapport au temps ; on a donc

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \text{C},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\text{A}}{dt} = \frac{\text{C}}{2}.$$

On conclut de là

$$\text{A} = \frac{\text{C}}{2}(t - t_0),$$

en supposant que t_0 soit l'instant où le mobile est en M_0. Donc, *si l'accélération passe par le point* O, *l'aire balayée par le rayon vecteur* OM *est proportionnelle au temps.*

Ce fait se présente, par exemple, dans les deux pro-

blèmes (nº 61) : mouvement d'un point attiré ou repoussé par un centre fixe proportionnellement à la distance.

Ainsi, dans la composition de deux mouvements vibratoires rectangulaires de même période (nº 36), la vitesse aréolaire est

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{1}{2} ab\omega \sin(\beta - \alpha),$$

expression qui montre, comme nous l'avons vu autrement, que le mobile tourne dans un sens ou dans l'autre suivant le signe de $\sin(\beta - \alpha)$.

63. Composition des forces. — Lorsque plusieurs forces agissent simultanément sur un point matériel, on admet que l'accélération qu'il prend est la somme géométrique des accélérations que chacune des forces lui imprimerait si elle était seule.

On en déduit immédiatement la composition des forces appliquées à un point matériel.

L'accélération imprimée à un point à un instant quelconque par des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *en nombre quelconque est la même que si le point était sollicité par une force unique* F *égale à leur somme géométrique*. Considérons des forces qui, agissant successivement sur le même point M, lui communiqueraient respectivement des accélérations γ_1, γ_2, ..., γ_n. Les valeurs de ces forces à l'instant t sont en grandeur, direction et sens

$$(F_1) = m(\gamma_1), \quad (F_2) = m(\gamma_2), \quad \ldots, \quad (F_n) = m(\gamma_n).$$

Lorsque toutes ces forces agissent en même temps sur le point M, elles lui communiquent une accélération γ égale à la somme géométrique de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$

$$(\gamma) = (\gamma_1) + (\gamma_2) + \ldots + (\gamma_n).$$

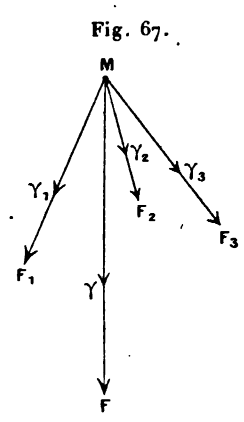
La valeur F à l'instant t de la force unique qui communi-

querait au point cette même accélération γ (*fig.* 67) est

$$(F) = m(\gamma).$$

Les figures formées par les points $F_1, F_2, \ldots, F_n$, F d'une part, et les points $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, γ d'autre part sont donc homothétiques par rapport au point M, le rapport d'homothétie étant m; comme γ est la somme géométrique de γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$, la force F est la somme géométrique de $F_1, F_2, \ldots, F_n$

Fig. 67.



$$(F) = (F_1) + (F_2) + \ldots + (F_n),$$

le théorème est donc démontré.

Cette force unique F qui produit la même accélération que les autres agissant simultanément s'appelle la *résultante* des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$, les forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ elles-mêmes étant les *composantes*.

On peut alors, toutes les fois que plusieurs forces agissent simultanément sur un point, les remplacer par leur résultante. Cette opération s'appelle *composition des forces appliquées à un point*.

Comme elle est identique à celle qui consiste à faire la somme géométrique des vecteurs représentant les forces, on voit qu'on peut lui appliquer tout ce que nous avons dit de la composition des vecteurs.

La résultante de deux forces est la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces.

La résultante de trois forces est la diagonale du parallélépipède construit sur ces forces; etc.

La projection de la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un point sur un axe est égale à la somme des projections des composantes.

Inversement il peut être utile de remplacer une force unique F appliquée à un point par d'autres F_1, F_2, ..., F_n dont elle serait la résultante; cette opération, appelée *décomposition d'une force en forces concourantes,* est identique à l'opération de la décomposition d'un vecteur. On pourra donc lui appliquer tout ce qui a été dit à ce sujet (n° 6).

64. Équations du mouvement. — Soit un point M de masse m sollicité par des forces représentées à l'instant t par F_1, F_2, ..., F_n. Appelons x, y, z les coordonnées du point M, (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), ..., (X_n, Y_n, Z_n) les projections des forces sur les axes; les projections X, Y, Z de leur résultante F sont

$$(F) \qquad X = \Sigma X_i, \qquad Y = \Sigma Y_i, \qquad Z = \Sigma Z_i;$$

les projections de l'accélération sont

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

La relation géométrique $(F) = m(\gamma)$ donne donc, pour les projections sur les trois axes, les relations

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X_i, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y_i, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z_i;$$

qui sont les *équations du mouvement.*

La notation ΣX_i signifie qu'il faut faire la somme des projections de toutes les forces appliquées sur Ox, et de même pour les deux autres.

65. Équilibre. — Plusieurs forces appliquées à un point matériel se font équilibre lorsque, le point étant au repos, ces forces ne lui impriment aucun mouvement. La somme géométrique des accélérations dues à ces forces est alors nulle; donc la somme géométrique des forces, c'est-à-dire leur résultante, est nulle. Cette condition *nécessaire* de

l'équilibre est évidemment *suffisante,* d'après le principe de l'inertie.

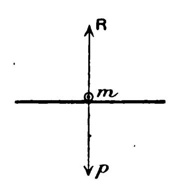
Pour exprimer, analytiquement, qu'un point matériel est en équilibre, il faut donc écrire que la résultante de toutes les forces qui agissent sur lui est nulle, c'est-à-dire que la somme des projections des composantes sur chacun des trois axes Ox, Oy, Oz est nulle :

$$\Sigma X_i = 0, \qquad \Sigma Y_i = 0, \qquad \Sigma Z_i = 0.$$

B. — POINT MATÉRIEL NON LIBRE.

66. Équilibre d'un point pesant sur un plan incliné; Frottement. — Quand un point pesant est posé sans vitesse initiale sur un plan horizontal, comme un objet sur une table, il reste immobile. Cela tient à ce que son poids p est tenu en équilibre par la résistance de la table. D'une façon plus précise, la table développe une résistance qui est une certaine force R, égale et opposée (*fig.* 68) au poids du point; le point matériel, étant alors sollicité par deux forces égales et opposées, est en équilibre.

Fig. 68.



Supposons maintenant que l'on place un point pesant, sans vitesse, sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizon. Nous supposons que ce point peut seulement glisser et non rouler sur le plan : il faut donc se le représenter comme un petit corps solide reposant par une face plane sur le plan et non comme une bille.

L'expérience montre que le point reste immobile tant que l'angle α est suffisamment petit, mais qu'il se met à glisser quand l'angle α surpasse un certain angle limite φ : cet angle dépend de la nature de la surface du plan et de la nature du

petit corps solide constituant le point, mais il ne dépend pas du poids de ce point; par exemple, si le plan est une plaque de fonte et si les petits corps qu'on place sur lui sont en fer, l'angle φ est d'environ 10°. On dit que cet angle est l'*angle de frottement* du point sur le plan : ainsi, dans l'exemple cité, on dira que l'angle de frottement du fer sur la fonte est de 10°. Plus le plan est poli, plus l'angle limite φ est petit. Si, au lieu de prendre une plaque de fonte sèche, on la lubrifie avec de l'huile, elle devient *plus glissante,* l'angle φ devient plus petit que 10°.

On se rend compte de l'existence de cet angle en prenant un plan matériel horizontal dont la surface est partout dans le même état, et en plaçant dessus de petits corps de même substance, mais de poids différents. Si l'on incline le plan sans secousses, les corps restent d'abord immobiles, puis ils se mettent tous à glisser au moment où l'inclinaison α dépasse l'angle limite φ. On a ainsi un moyen, d'ailleurs peu précis, de déterminer l'angle de frottement de deux substances.

Analysons maintenant ce phénomène. Le point étant en équilibre sur le plan incliné (*fig.* 69), le plan développe une résistance ou réaction qui fait équilibre au poids p. Or ce poids p fait, avec la normale mN au plan, un angle égal à α. On peut donc dire que le plan développe une résistance qui détruit le poids p, pourvu que l'angle de ce poids avec la normale au plan soit moindre qu'un certain angle déterminé φ, qui est l'angle de frottement du corps sur le plan.

Fig. 69.

Décomposons le poids p en deux forces : l'une N, normale au plan; l'autre T, dirigée suivant la ligne de plus grande pente. La force N ne fait qu'appuyer le corps contre le plan, la force T tend à le faire glisser. Mais, comme nous venons de le voir, le glissement ne se produit pas tant que l'angle α de p avec la normale est

moindre que φ, ou, comme α et φ sont aigus, tant que,

$$\tang\alpha \leqq \tang\varphi.$$

Or le triangle mNp, dans lequel $mN = N$ et $Np = T$, donne

$$\tang\alpha = \frac{T}{N}.$$

Donc le glissement ne se produit pas tant que

$$\frac{T}{N} \leqq \tang\varphi;$$

il se produit quand

$$\frac{T}{N} > \tang\varphi.$$

La quantité $\tang\varphi$ s'appelle *coefficient de frottement du point matériel sur le plan.* On désigne ordinairement ce coefficient par f,

$$f = \tang\varphi.$$

Ce coefficient étant connu, on voit que le glissement ne se produit pas tant que

$$T \leqq fN.$$

On a ainsi les conditions d'équilibre d'un point pesant sur un plan incliné avec frottement.

Réaction du plan. — Nous avons dit que le plan produit une résistance ou réaction qui est une force R appliquée au point en équilibre égale et opposée au poids. Cette force R fait donc avec la normale également un angle moindre que φ. Si on la décompose en une composante normale N′ (*fig.* 70) et une composante T′ située dans le plan, N′ est égale et opposée à N, T′ égale et opposée à T. On a donc dans l'équilibre

Fig. 70.

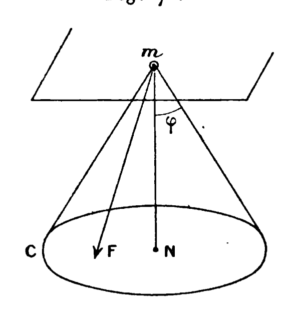
$$T' \leqq fN'.$$

67. Équilibre d'un point sur un plan sous l'action de forces quelconques. — Soit un plan fixe, un point m pouvant glisser sur ce plan, ce point étant sollicité par différentes forces F_1, F_2, ..., F_n, parmi lesquelles se trouve le poids; soit F la résultante de ces forces. Pour que le point supposé immobile ne glisse pas sur le plan, il faut et il suffit :

1° Que la force F soit dirigée de façon à appliquer le point contre le plan;

2° Qu'elle fasse avec la normale au plan un angle moindre que l'angle de frottement φ du point sur le plan.

Fig. 71.



Supposons qu'on décrive un cône de révolution (*fig.* 71) ayant pour sommet m, pour axe la normale mN au plan et pour demi-angle au sommet l'angle φ. Pour que le point m soit en équilibre, il faut et il suffit que la force F soit *dans l'intérieur de ce cône*. On appelle ce cône le *cône de frottement*.

Si l'on décompose F en une force N normale au plan et une force T parallèle au plan, pour qu'il y ait équilibre il faut et il suffit que

$$T \leqq f N.$$

Quand l'équilibre a lieu, le plan produit sur le point une réaction R égale et opposée à F : en décomposant cette réaction en une force N' normale au plan et une force T' parallèle au plan, N' est égale et parallèle à N, T' égale et parallèle à T; donc, dans l'équilibre, les deux composantes de la réaction du plan vérifient l'inégalité

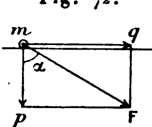
$$T' \leqq f N'$$

Ces inégalités expriment ce qu'on appelle les *lois du frottement à l'état d'équilibre.*

Remarque. — Comme cas limite, on considère quelquefois le cas idéal où il n'y aurait pas de frottement, c'est-à-dire le cas où le plan serait parfaitement poli; dans ce cas, le coefficient de frottement f et l'angle φ sont nuls, et pour qu'il y ait équilibre. il faut et il suffit que la force soit dirigée de façon à appliquer le point sur le plan et normale au plan; les composantes T et T' sont nulles dans l'équilibre.

Application : Équilibre limite d'un point pesant sur un plan horizontal sous l'action d'une force horizontale. — Soit p le poids du point, q la force horizontale appliquée au point (*fig.* 77). Ces deux forces ont une résultante F : pour que le point reste en équilibre, il faut et il suffit que F fasse avec la normale un angle α moindre que φ; on a évidemment

Fig. 72.



$$\tang\alpha = \frac{q}{p}.$$

Donc, pour l'équilibre, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{q}{p} \leqq \tang\varphi, \qquad q \leqq fp.$$

f désignant le coefficient de frottement.

68. Loi du frottement de glissement à l'état de mouvement. — Nous venons de voir suivant quelles lois s'exerce la réaction d'un plan sur un point pouvant glisser sur le plan, lorsque ce point est en équilibre.

Quand le point glisse sur le plan, les lois de la réaction sont changées. Soit m le point mobile, V sa vitesse (*fig.* 73) à l'instant t; cette vitesse est un vecteur du plan. La réac-

tion R du plan sur le point est une force *oblique au plan;* décomposons cette force en une force normale N′ et une force parallèle au plan T′; la force normale est située par rapport au plan du côté où est placé le point; elle a une grandeur quelconque; *la force tangentielle* T′ *est dirigée en sens contraire de la vitesse* V *du point et sa grandeur est donnée par la relation*

Fig. 73.



$$T' = fN',$$

f étant le coefficient de frottement du point sur le plan. On voit que quand il y a équilibre on a,

$$T' \leqq fN';$$

au contraire, quand il y a mouvement,

$$T' = fN'.$$

Application. Mouvement rectiligne d'un point pesant sur un plan horizontal sous l'action d'une force constante. — Soit un point matériel de poids p posé sur un plan horizontal et sollicité par une force constante en grandeur et en direction q parallèle au plan. Nous supposons qu'à l'instant $t = 0$ le point soit abandonné à lui-même ou lancé avec la vitesse v_0 dans la direction de q, soit dans le sens de q, soit en sens contraire. Le mouvement est alors rectiligne et le point décrit une portion de droite parallèle à q.

Premier cas. — Le point est abandonné sans vitesse.

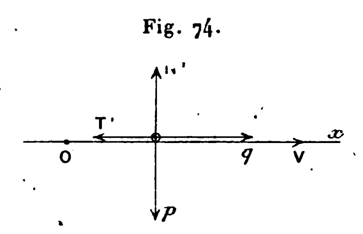
Si $q \leqq fp$, le point reste immobile (comme nous l'avons vu).

Si $q > fp$, le point se met à glisser dans le sens de q : prenons sa position initiale comme origine O et la droite qu'il décrit comme axe Ox (*fig.* 74), le sens positif étant celui de q. La vitesse v du point à un instant quelconque est dans le sens de q; le plan exerce sur le point une réaction R qu'on peut décomposer en une force normale N′ et

une force tangentielle T′; la force T′ est de sens contraire de la vitesse et égale à fN′.

Cela posé, remarquons d'abord que $N' = p$. Le point mobile m est sollicité par les quatre forces q, p, T′, N′. Comme il décrit une droite, son accélération γ est dirigée suivant cette droite, et par suite aussi la résultante $m\gamma$ de toutes les forces qui lui sont appliquées. La force N′ doit donc être égale et opposée à p.

Fig. 74.



La force T′ égale à fN′ est donc égale à fp. Comme q est supposé supérieur à fp, les deux forces q et fp se composent en une seule $q - fp$ dirigée dans le sens Ox du mouvement. Comme q est constant par hypothèse, on voit qu'on est ramené au mouvement rectiligne uniformément accéléré d'un point sous l'action d'une force constante, le point partant de l'origine sans vitesse.

L'équation du mouvement est

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = q - fp.$$

On en déduit

$$m\frac{dx}{dt} = (q - fp)t,$$

sans ajouter de constante, puisque la vitesse initiale est supposée nulle; puis

$$mx = \frac{1}{2}(q - fp)t^2,$$

sans ajouter de constante, puisque le mobile part de O.

Deuxième cas. — Le point est lancé dans le sens de q avec une vitesse v_0; la vitesse variant d'une façon continue est, au commencement du mouvement, dans le sens de q; donc T′

est en sens contraire et l'équation du mouvement est encore

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = q - fp.$$

1° Si $q < fp$, le mouvement est uniformément *retardé*, on a

$$m\frac{dx}{dt} = (q - fp)t + mv_0,$$

la vitesse s'annule au bout du temps

$$t_1 = \frac{mv_0}{fp - q}.$$

A cet instant le mobile occupe une certaine position m_1 (*fig.* 75) facile à obtenir par la formule

$$mx = \frac{1}{2}(q - fp)t^2 + mv_0t$$

qui donne le chemin parcouru ; il se trouve alors dans les

Fig. 75.

mêmes conditions que s'il était abandonné en m_1 sur le plan, sans vitesse initiale, et il reste immobile en m_1, car $q < fp$.

En résumé, le mouvement est uniformément retardé, et au moment où la vitesse s'annule le point s'arrête et reste immobile. C'est là le fait qui se produit, par exemple, pour $q = 0$; si on lance une pierre sur un plan horizontal, elle décrit une droite avec une vitesse décroissante et finit par s'arrêter.

2° Si $q > fp$, le point se meut sur Ox d'un mouvement uniformément accéléré.

3° Si $q = fq$, l'équation du mouvement est

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

le mouvement est rectiligne et uniforme.

Troisième cas. — Le point est lancé en sens contraire de q. Prenons le sens de la vitesse initiale v_0 comme sens des x positif. Dans une position m, la vitesse du mobile est dans le sens positif (*fig.* 76), donc T′ est dans le sens négatif comme q; les deux forces $T' = fp$ et q s'ajoutent alors pour

Fig. 76.

O V₀ T′ q m V m₁ x

donner une force $q + fp$ dans le sens négatif. L'équation du mouvement est

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -(q + fp),$$

elle définit un mouvement d'abord uniformément retardé; on en déduit

$$m \frac{dx}{dt} = -(q + fp)t + m v_0.$$

Le point arrive au bout du temps

$$t_1 = \frac{m v_0}{q + fp}$$

dans la position m_1 où sa vitesse s'annule. A partir de ce moment, il est dans les conditions du premier cas; il se comporte comme s'il était abandonné sans vitesse initiale sur le plan sous l'action de la force q.

Si $q \leqq fp$, il reste immobile en m_1;

Si $q > fp$, il revient sur ses pas d'un mouvement uniformément accéléré d'accélération $\frac{q - fp}{m}$.

Cas où la force q cesserait d'agir à un certain instant. — Si, à un instant où le mobile a une vitesse v_0, q devenait nul, l'équation du mouvement serait

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -fp;$$

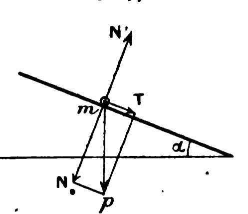
et le mobile, après avoir pris un mouvement uniformément retardé, s'arrêterait dans la position où sa vitesse devient nulle; c'est, comme nous l'avons déjà dit, le cas d'une pierre lancée sur un plan horizontal. Si, en même temps, le frottement était nul, on aurait

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

le mouvement serait rectiligne et uniforme. On peut approcher de ce cas idéal en lançant un morceau de glace sur un plan de glace horizontal; le mouvement est sensiblement uniforme, car le frottement, sans être entièrement nul, devient très faible.

69. Mouvement d'un point sur un plan incliné sans frottement. — Quand un point se meut sur un plan incliné sans frottement, $f = 0$; la composante tangentielle T′ de la réaction du plan sur le point est nulle, et cette réaction se réduit à sa composante normale N′ (*fig.* 77).

Fig. 77.



Soit alors un point pesant m de poids p mobile, sans frottement, sur un plan incliné, faisant un angle α avec l'horizon. Soit N′ la réaction du plan sur le point; décomposons p en deux composantes, l'une $T = p\sin\alpha$ située dans le plan et dirigée suivant la ligne de plus grande pente, vers le bas, l'autre $N = p\cos\alpha$ normale au plan. Le point se meut sous l'action des trois forces T, N et N′. Comme il reste dans le plan, son accélération γ est dans le plan : la résultante des forces qui lui sont appliquées, étant égale à $m\gamma$, est donc aussi dans le plan. On a donc

$$N' = N = p\cos\alpha,$$

et la résultante des forces agissant sur le point est la force

$$T = p \sin \alpha,$$

constante en grandeur, direction et sens.

On pourra alors appliquer au mouvement produit par cette force tout ce que nous avons dit du mouvement d'un point sous l'action d'une force constante. Si le point est lancé suivant une ligne de plus grande pente, vers le haut ou vers le bas, ou abandonné à lui-même, il prend un mouvement uniformément retardé ou accéléré d'accélération $\frac{p \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha$.

S'il est lancé dans une autre direction dans le plan, il prend un mouvement parabolique.

70. Principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Newton a énoncé, sous le nom de *Principe de l'égalité de l'action et de la réaction,* la loi suivante : Si un point M est sollicité par une force F due à la présence d'un autre point M′, cette force est dirigée suivant MM′ et le second point M′ éprouve de la part de M une force égale et précisément opposée à F. Newton exprime ce fait en disant que la réaction est égale et opposée à l'action.

Le principe de l'égalité de l'action et de la réaction s'étend immédiatement aux actions mutuelles de deux systèmes de points (S) et (S′).

Si les points du système (S) exercent sur ceux de (S′) certaines forces, inversement les points de (S′) exercent sur ceux de (S) des actions représentées par des forces égales et directement opposées aux premières.

Ainsi, quand un cheval tire une voiture, les actions d'un des traits sur la voiture sont égales et directement opposées à celles de la voiture sur le trait, etc.

71. Pression totale ; Pression par unité de surface. — Comme application de ce principe général, nous pouvons,

dans les exercices précédents relatifs au mouvement d'un point sur un plan, déterminer ce qu'on appelle la *pression totale du point sur ce plan* ou *force pressante.*

Nous avons vu que, quand un point est en équilibre ou en mouvement sur un plan, la résistance du plan sur lui ou la réaction du plan sur lui est une force R ayant une composante normale au plan N′ et une composante parallèle au plan T′. Nous avons donné successivement les lois de ces forces dans l'hypothèse de l'équilibre, puis dans celle du mouvement.

D'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, puisque le plan agit sur le point en produisant une force R appliquée au point, celui-ci doit agir à son tour sur le plan et produire une force — (R) égale et opposée à R et appliquée au plan.

C'est cette force qu'on appelle *pression totale* du point sur le plan.

Cette pression totale pourra comme R se décomposer en deux forces, l'une —(N′) normale au plan, égale et opposée à N′, l'autre — (T′) parallèle au plan, égale et opposée à T′.

On pourra appliquer ces considérations à chacun des problèmes précédents.

Par exemple, pour un point pesant en équilibre sur un plan incliné avec frottement (66), l'angle α étant au plus égal à φ, la pression totale du point sur le plan est égale et opposée à la réaction R du plan sur le point. Mais, comme R est égal et opposé au poids du point, la pression totale du point sur le plan est précisément égale au poids.

Si un point pesant de poids p glisse sur un plan horizontal, sous l'action d'une force constante q parallèle au plan (68), la réaction R du plan a une composante normale N′ égale et opposée à p et une composante tangentielle $T' = fp$ opposée à la vitesse V; la pression totale du point sur le plan a donc une composante normale égale au poids et une composante tangentielle égale à fp dirigée suivant la vitesse V. La pres-

sion totale est donc

$$p\sqrt{1+f^2} = \frac{p}{\cos\varphi}.$$

Enfin, si un point pesant glisse sans frottement sur un plan incliné faisant l'angle α avec l'horizon, f est nul, T' est nul, la réaction du plan se réduit à la composante normale $N' = p\cos\alpha$ et la pression totale du point sur le plan, égale et opposée à N', est normale au plan et égale à $p\cos\alpha$.

Quand un corps de dimensions finies est en repos sur un plan horizontal qu'il touche par une surface plane S, on appelle *pression par unité de surface* ϖ le quotient de la pression totale, c'est-à-dire du poids P du corps par S,

$$(1) \qquad \varpi = \frac{P}{S}.$$

La *pression par unité de surface* n'a pas, comme la *pression totale,* les dimensions d'une force; on voit, d'après l'équation (1), que ses dimensions sont $L^{-1}MT^{-2}$.

L'identité complète des termes par lesquels on désigne, dans l'usage courant, ces deux grandeurs de nature si différente, tend à créer une confusion que les considérations d'homogénéité devront toujours permettre de dissiper facilement dans les calculs algébriques; dans les applications numériques, on distinguera les pressions totales et les pressions par unité de surface par l'indication exacte des unités servant à les mesurer.

72. Pendule simple, petites oscillations. — Considérons un point pesant de masse m rattaché à un point fixe O par un fil inextensible et sans masse. Supposons que ce point soit lancé dans un plan vertical passant par O; il décrit alors un arc de cercle de centre O. Pour étudier son mouvement, appelons O' le point le plus bas de la circonférence, et θ l'angle que fait, à l'instant t, le rayon Om avec le rayon

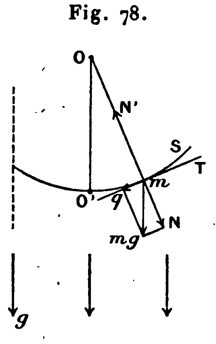
vertical OO′, cet angle étant regardé comme positif à droite et comme négatif à gauche (*fig.* 78).

Prenons le point O′ comme origine des arcs s sur la circonférence et comptons ces arcs positivement vers la droite, dans le sens O′s. On aura évidemment

$$s = l\theta,$$

l désignant la longueur du pendule.

Fig. 78.



La masse m se meut dans le champ de force uniforme de la pesanteur d'intensité g; elle est donc sollicitée par une force mg qui est son poids p, et qui est parallèle à OO′; au même point matériel est appliquée la tension du fil N′ dirigée suivant le fil, c'est-à-dire de m vers O; il est évident, en effet, que le fil doit tirer sur le point avec une certaine force pour l'empêcher de s'éloigner du centre.

Nous allons chercher l'accélération tangentielle γ_t du mobile estimée positivement dans le sens mT de la tangente menée dans le sens des arcs positifs.

Décomposons le poids mg en deux forces, l'une

$$N = mg\cos\theta$$

normale au cercle, l'autre

$$q = mg\sin\theta$$

tangente au cercle, et remarquons que cette composante est dirigée en sens contraire de mT. Les deux forces normales N et N′ ont une résultante N_1 normale au cercle, de sorte que, finalement, le point est sollicité par une force tangente q et par une force normale N_1 dont la valeur estimée positivement dans le sens mO est $N_1 = N' - N$.

L'accélération est égale à la résultante des forces agissant

sur le point divisée par m : elle a donc une composante tangentielle égale en grandeur à $\frac{q}{m}$, ayant mêmes direction et sens que q, et une composante normale égale à $\frac{N_1}{m}$.

La valeur de la composante tangentielle de l'accélération estimée positivement dans le sens mT est alors $-\frac{q}{m}$; d'autre part, cette valeur est dans un mouvement quelconque $\frac{d^2s}{dt^2}$, on a donc l'équation

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{q}{m},$$

ou, en remplaçant s par $l\theta$ et q par $mg\sin\theta$

$$(1) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta;$$

il faudrait tirer de cette équation θ en fonction de t, de telle façon que pour $t=0$ θ ait une valeur donnée correspondant à l'écart initial et que

$$v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}$$

prenne une valeur algébrique donnée v_0 égale à la vitesse initiale imprimée au point.

Le problème ainsi posé dépasse les limites d'une analyse élémentaire, si l'on veut le traiter rigoureusement. Mais, dans les applications à la Physique, on suppose ordinairement qu'à l'instant $t=0$, θ prenne une valeur très petite θ_0 et que la vitesse initiale soit nulle; $\frac{d\theta}{dt}$ ou θ'_t est donc nul pour $t=0$. Le pendule oscille alors en s'écartant très peu de la position d'équilibre OO'. L'arc θ restant très petit, on peut remplacer, avec une grande approximation, $\sin\theta$ par θ et l'équation du mouvement devient

$$(2) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta.$$

Cette équation est de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad \left(\omega^2 = \frac{g}{l}\right).$$

Or, nous avons vu (n° **61**) que la solution de cette dernière équation, qui prend la valeur x_0 pour $t = 0$ et dont la dérivée prend la valeur x'_0 pour $t = 0$, est donnée par la formule

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{x'_0}{\omega} \sin \omega t.$$

On aura donc, en remplaçant x par θ, x_0 par θ_0, x'_0 par θ'_0, et remarquant que θ'_0 est supposé nul,

$$\theta = \theta_0 \cos t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

C'est là l'équation des petites oscillations d'un pendule simple, l'amplitude des oscillations étant θ_0. On voit qu'aux époques 0, $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, ..., la valeur de θ est alternativement θ_0, $-\theta_0$, ... La durée de l'*oscillation simple* est donc

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Remarque. — En se plaçant dans le cas général, on peut déterminer rigoureusement la vitesse dans un mouvement pendulaire, comme il suit. Multiplions les deux membres de (1) par $2\frac{d\theta}{dt}$, nous aurons

$$2\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2\frac{g}{l}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Sous cette forme, le premier membre est la dérivée de $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ par rapport à t et le deuxième de $2\frac{g}{l}\cos\theta$. Ces deux fonctions ayant des dérivées égales diffèrent par une constante, donc

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}\cos\theta + c;$$

la vitesse v du pendule étant

$$v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\theta}{dt},$$

cette formule équivaut à

$$v^2 = 2gl\cos\theta + h,$$

h étant une constante.

A l'instant initial $\theta = \theta_0$, $v = v_0$, donc

$$h = v_0^2 - 2gl\cos\theta_0;$$

la formule qui donne v est alors

$$v^2 - v_0^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

et si la vitesse initiale est nulle,

$$v^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Dans le courant d'une oscillation simple, θ varie de θ_0 à $-\theta_0$, v part de zéro et revient à zéro en passant par un maximum pour $\theta = 0$, c'est-à-dire au moment où le pendule passe par la verticale.

C. — THÉORIE DES MOMENTS.

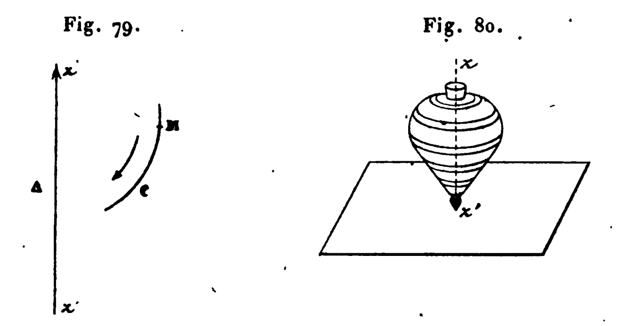
73. Sens positif de la rotation autour d'un axe orienté. — Soit un axe Δ : on dit qu'il est orienté quand on a fait choix, sur cet axe, d'un sens positif que l'on indique ordinairement par une flèche. Ainsi dans la *fig.* 79, le sens choisi comme positif sur Δ est le sens $z'z$. Imaginons alors un point M qui se meut dans l'espace en suivant une courbe quelconque C, non située dans un même plan avec l'axe; on dit que le point tourne autour de l'axe dans le sens positif quand un observateur debout le long de l'axe, les pieds en z' et la tête en z, voit le point marcher de sa gauche vers sa

droite. Dans le cas contraire, on dit que le point tourne autour de l'axe dans le sens négatif.

Par exemple, si l'on pose une montre sur une table, le cadran en l'air, et si par le centre de la montre on mène un axe vertical, orienté positivement vers le haut, les extrémités des aiguilles tournent autour de cet axe dans le sens positif.

Revenons au cas général et supposons l'axe $z'z$ réalisé matériellement; puis prenons l'extrémité z de l'axe entre les

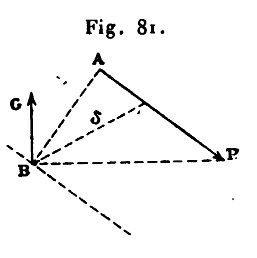
Fig. 79. Fig. 80.



doigts de la main droite; le sens positif est le sens dans lequel on tend naturellement à faire tourner l'axe entre les doigts. Ainsi quand on veut faire tourner une toupie sur une table, on prend l'extrémité z de l'axe $z'z$ entre les doigts de la main droite (*fig.* 80), et on la fait naturellement tourner dans le sens positif autour de la verticale ascendante $z'z$.

74. Moment linéaire d'un vecteur par rapport à un point. — Soit (*fig.* 81) un vecteur P d'origine A et un point arbitraire B de l'espace. Le *moment linéaire* du vecteur P par rapport au point B est un autre vecteur BG d'origine B ayant : 1° une longueur BG égale numériquement au produit $P\delta$ du vecteur par sa distance δ au point B; 2° une direction perpendiculaire au plan BAP déterminé

Fig. 81.



par le vecteur et le point B; 3° un sens tel qu'un mobile parcourant le vecteur AP de A vers P tourne dans le sens positif autour de l'axe orienté BG.

Ces définitions déterminent complètement le moment linéaire BG. On peut remarquer que, si un mobile suivait le moment linéaire BG de B vers G, il tournerait aussi dans le sens positif autour de l'axe orienté AP.

Quand on représente les longueurs et les forces à la même échelle, ce que nous supposerons constamment par la suite, la grandeur $P\delta$ du moment linéaire BG est numériquement égale au double de l'aire du triangle BAP.

Le moment linéaire d'un vecteur P par rapport à un point ne change évidemment pas quand on transporte ce vecteur en un point quelconque de sa direction sans altérer ni sa grandeur ni son sens. Si, laissant la grandeur et la direction d'un vecteur invariables, on changeait son sens, son moment linéaire par rapport à un point changerait lui-même de sens.

Le moment linéaire d'un vecteur P par rapport à un point B reste le même en grandeur, direction et sens quand, laissant le vecteur invariable, on déplace le point B sur une parallèle au vecteur.

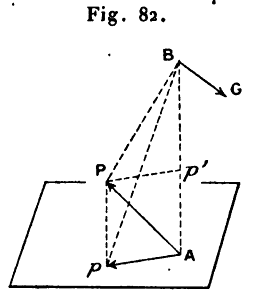
Cas où le moment linéaire d'un vecteur est nul. — Pour que le moment linéaire $BG = P\delta$ soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs P ou δ soit nul; donc il faut et il suffit, ou bien que le vecteur soit nul, ou bien que sa direction passe par le point B par rapport auquel on prend le moment. Ces deux cas sont précisément les seuls cas dans lesquels le plan BAP serait indéterminé.

Dimensions d'un moment. — Quand on a fait le choix d'une certaine unité de longueur et d'une certaine unité de force, la grandeur du moment linéaire BG est mesurée par le nombre $P\delta$ qui est de dimensions FL, ou dans le système longueur, masse, temps, ML^2T^{-2}.

75. Théorème I. — *Le moment linéaire d'un vecteur* AP *par rapport à un point* B *est égal au moment linéaire par rapport au même point de la projection du vecteur sur un plan mené par* A *perpendiculairement à* AB.

Soient en effet (*fig.* 82) un vecteur AP d'origine A et un point B; menons par A un plan perpendiculaire à BA et appelons p la projection orthogonale du vecteur P sur ce plan; il faut montrer que les deux vecteurs P et p ont même moment linéaire par rapport à B. En effet, ces deux moments ont même grandeur, car les deux triangles BAP et BAp sont évidemment équivalents dès qu'on leur donne comme base commune BA; ils ont même direction, car ils sont perpendiculaires aux deux plans BAP et BAp qui se confondent; ils ont aussi même sens, car un mobile suivant l'un ou l'autre des vecteurs AP ou Ap tourne dans le même sens autour d'une perpendiculaire au plan BAPp.

Fig. 82.



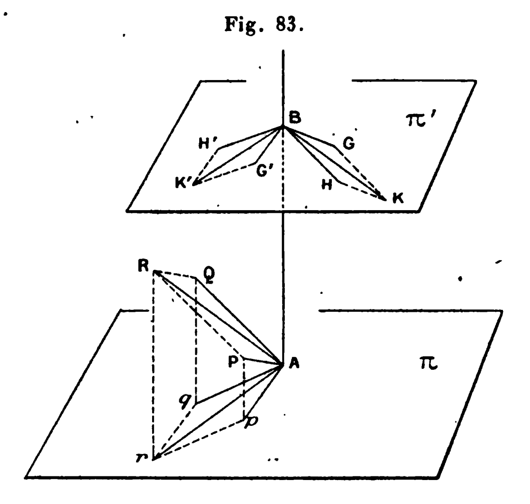
76. Théorème II. — *Le moment linéaire, par rapport à un point, de la résultante de plusieurs vecteurs concourants est égal à la somme géométrique des moments linéaires de ces vecteurs.*

Nous démontrerons d'abord le théorème pour deux vecteurs concourants; nous passerons de là au cas d'un nombre quelconque de vecteurs.

Deux vecteurs. — Soient deux vecteurs concourants AP et AQ appliqués au point A, AR leur somme géométrique

ou résultante (*fig.* 83). Prenons les moments linéaires respectifs BG, BH, BK de ces trois vecteurs par rapport à un point quelconque B; il faut montrer que le vecteur K est la somme géométrique des vecteurs G et H. Pour cela, menons par A un plan Π perpendiculaire à AB et appelons p, q, r les

Fig. 83.



projections des trois vecteurs P, Q, R sur ce plan; comme la projection d'un parallélogramme est un parallélogramme, le vecteur r est la somme géométrique des vecteurs p et q.

D'après le théorème I, les moments linéaires des vecteurs P, Q, R par rapport à B sont identiques à ceux des vecteurs p, q, r; ils sont donc égaux aux produits de p, q, r par BA et perpendiculaires aux plans BAp, BAq, BAr dans le sens indiqué par la définition des moments linéaires. Ces trois moments G, H, K sont évidemment dans un même plan Π′ perpendiculaire à AB au point B. Cela posé, menons par B trois vecteurs BG′, BH′ et BK′ respectivement parallèles aux vecteurs p, q, r, de même sens qu'eux et égaux aux produits de p, q, r par BA

$$BG' = p \times BA, \qquad BH' = q \times BA, \qquad BK' = r \times BA.$$

Ces trois vecteurs sont également dans le plan Π'. La figure BG'K'H' est alors homothétique de $Apqr$, et comme cette dernière est un parallélogramme de diagonale Ar, la première est un parallélogramme de diagonale BK'.

Mais maintenant, pour obtenir les trois moments linéaires BG, BH et BK de p, q, r, par rapport à B, il suffit de faire tourner l'ensemble des trois vecteurs BG', BH', BK' d'un angle droit autour de BA dans le sens positif des rotations : donc BK est la diagonale du parallélogramme construit sur BG et BH, ce qui démontre le théorème.

Nombre quelconque de vecteurs concourants. — Soient n vecteurs $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ayant même origine A, et R leur résultante. Construisons les moments linéaires $BG_1, BG_2, \ldots, BG_n$ de ces vecteurs par rapport à un point B et soit BG le moment linéaire de R. Il faut montrer que BG est la somme géométrique de $BG_1, BG_2, \ldots, BG_n$.

On pourrait employer la même méthode que précédemment en remplaçant tous les vecteurs par leurs projections sur le plan Π mené par A perpendiculairement à AB, et remarquant que la projection de la résultante R sur ce plan est la somme géométrique des projections des composantes.

Nous emploierons une autre méthode qui consiste à montrer que, si le théorème est vrai pour $n-1$ vecteurs concourants, il l'est pour n. Soit Q la résultante des $n-1$ vecteurs $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ et BH son moment linéaire par rapport à B. Par hypothèse BH est la somme géométrique de BG_1, $BG_2, \ldots, BG_{n-1}$

$$(BH) = (BG_1) + (BG_2) + \ldots + (BG_{n-1}).$$

La résultante R des n vecteurs donnés $P_1, P_2, \ldots, P_n$ s'obtient en composant Q avec P_n ; donc le moment linéaire BG de R est la somme géométrique des moments BH et BG_n de Q et de P_n

$$(BG) = (BH) + (BG_n).$$

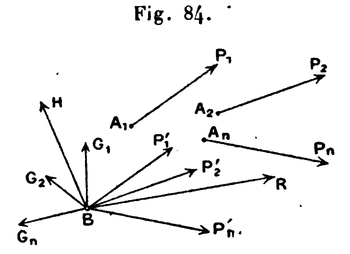
Il en résulte

$$(BG) = (BG_1) + (BG_2) + \ldots + (BG_n),$$

ce qui démontre le théorème.

77. Système de vecteurs non concourants; somme géométrique ou résultante générale et moment résultant par rapport à un point. — Soient des vecteurs A_1P_1, $A_2P_2, \ldots, A_nP_n$ placés d'une façon quelconque dans l'espace

Fig. 84.



(*fig.* 84). Prenons un point B quelconque, et faisons les deux constructions suivantes :

1° Par le point B menons des vecteurs $BP'_1, BP'_2, \ldots, BP'_n$ égaux et parallèles aux vecteurs proposés, et construisons leur somme géométrique BR; ce vecteur R est, par définition, *la somme géométrique ou résultante générale des vecteurs donnés relativement au point* B.

2° Prenons les moments linéaires $BG_1, BG_2, \ldots, BG_n$ des vecteurs proposés par rapport au point B et construisons leur somme géométrique BH; ce vecteur est, par définition, *le moment résultant des vecteurs donnés par rapport au point* B.

A chaque point B de l'espace correspond ainsi une somme géométrique et un moment résultant. Quand le point B se déplace, la somme géométrique reste la même en grandeur,

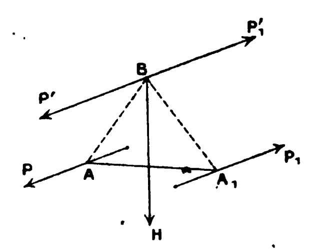
direction et sens, comme il résulte de sa définition même, mais le moment résultant change en général.

Application à un système de vecteurs concourants. — Si l'on imagine en particulier un système de vecteurs AP_1, AP_2, ..., AP_n ayant même origine, leur somme géométrique relative au point A n'est autre chose que leur résultante R, et leur moment résultant relatif au point A est évidemment nul.

Pour tout autre point B, la somme géométrique des vecteurs concourants est égale à leur résultante R en grandeur, direction et sens; leur moment résultant BH par rapport au point B est, d'après le théorème précédent, égal au moment de leur résultante AB par rapport au même point : il est donc perpendiculaire à la somme géométrique.

78. Couple de vecteurs : axe d'un couple. — Appliquons en particulier les définitions précédentes à un système

Fig. 85.

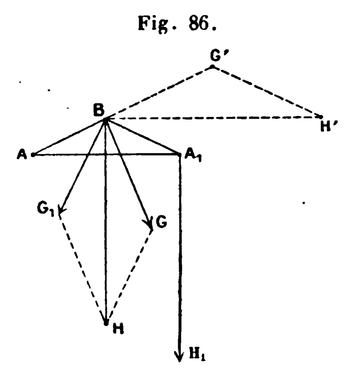


de deux vecteurs P et P_1 égaux, parallèles et de sens contraires (*fig.* 85). Ce système de deux vecteurs s'appelle un *couple de vecteurs*.

Soit B un point quelconque de l'espace; si l'on mène par ce point deux vecteurs BP' et BP'_1 égaux et parallèles aux deux vecteurs donnés, leur somme géométrique est évidemment nulle.

Cherchons, d'autre part, le moment résultant relatif au point B; nous démontrerons que *ce moment résultant est le même en grandeur, direction et sens, quel que soit le point* B *choisi.* Pour cela, remarquons que, si l'on a abaissé du point B des perpendiculaires BA et BA_1 sur les deux vecteurs P et P_1, le plan BAA_1 est perpendiculaire à la direction commune des vecteurs et les deux moments linéaires BG et BG_1 des vecteurs par rapport à B sont dans ce plan ainsi qu

Fig. 86.



leur moment résultant BH. Prenons ce plan pour plan de la *fig.* 86, le vecteur P étant supposé dirigé en avant du plan de la figure et le vecteur P_1 en arrière.

Le moment linéaire de P par rapport à B est un vecteur $BG = P \times AB$ situé dans le plan de la figure, perpendiculaire à AB, dans le sens indiqué. De même, le moment linéaire de P_1 par rapport à B est un vecteur $BG_1 = P \times A_1B$, car $P_1 = P$, perpendiculaire à A_1B. Le moment résultant BH est la diagonale du parallélogramme construit sur BG et BG_1; ce vecteur est perpendiculaire à AA_1 et égal à $P \times AA_1$. En effet, si l'on faisait tourner le triangle BGH d'un angle droit autour de B, dans son plan, on l'amènerait dans la position $BG'H'$ dans laquelle les côtés BG' et $G'H'$ seraient parallèles aux côtés AB et BA_1 de même sens qu'eux et égaux aux produits de ces côtés par P; le troisième côté BH serait donc

amené aussi à être parallèle à AA_1, de même sens que AA_1 et égal au produit $P \times AA_1$. Donc, avant la rotation du triangle, le côté BH était perpendiculaire à AA_1, c'est-à-dire au plan du couple, et égal à $P \times AA_1$. Il reste donc le même en grandeur, direction et sens, quel que soit le choix du point B.

Le moment résultant d'un couple de vecteurs s'appelle l'*axe du couple*.

L'axe d'un couple est ainsi un vecteur défini en grandeur, direction et sens, mais non en position, car son point d'application est un point quelconque B de l'espace. Pour obtenir les éléments de cet axe (grandeur, direction et sens) il suffit de prendre le moment résultant du couple par rapport à un point particulier, par exemple par rapport au point A_1, pris sur l'un des vecteurs P_1 du couple; l'axe du couple est le moment résultant des deux vecteurs P et P_1 par rapport au point A_1 (*fig.* 86); comme le moment de P_1 est nul, l'axe se réduit au moment linéaire A_1H_1 de P par rapport au point A_1; il est donc égal au produit de P par la plus courte distance AA_1 des deux vecteurs, perpendiculaire au plan du couple et dirigé dans un sens tel qu'un mobile suivant AP tourne autour de A_1H_1 dans le sens positif. La distance des deux vecteurs est le *bras de levier du couple;* la grandeur $P \times AA_1$ de l'axe est le *moment du couple*. On peut remarquer que ce moment est égal à l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs du couple.

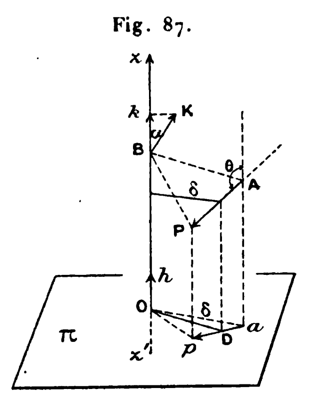
Quand le moment d'un couple est nul, ou bien le facteur P est nul et les deux vecteurs du couple sont nuls, ou bien le bras de levier AA_1 est nul et les deux vecteurs sont égaux et directement opposés.

79. Moment par rapport à un axe. — Soit un axe $z'z$ sur lequel on a fixé un sens positif, de z' vers z par exemple, et un vecteur P appliqué au point A; *le moment du vecteur par rapport à l'axe est la valeur algébrique du moment*

linéaire de la projection du vecteur sur un plan perpendiculaire à l'axe par rapport au pied de l'axe sur ce plan.

Menons, d'après cela (*fig.* 87), un plan quelconque Π perpendiculaire à l'axe, appelons O le pied de l'axe sur ce plan et *ap* la projection du vecteur AP sur ce plan. Le moment linéaire de *ap* par rapport au point O est un vecteur O*h*

Fig. 87.



dirigé suivant O*z*. Le moment de AP par rapport à l'axe est la longueur O*h* précédée du signe + ou du signe — suivant que O*h* est dirigé dans le sens positif de l'axe ou en sens contraire. Dans la *fig.* 87 ce moment est positif.

Remarques sur la grandeur et le signe du moment d'un vecteur par rapport à un axe.

Soit δ la plus courte distance du vecteur AP à l'axe; cette plus courte distance se projette en vraie grandeur sur le plan Π, suivant la perpendiculaire OD à *ap*. La valeur absolue du moment O*h* par rapport à l'axe $z'z$ est égale à $ap \times \delta$, c'est-à-dire au double de l'aire O*ap*; quant au signe à donner à ce moment, il est + ou — suivant qu'un mobile parcourant *ap* tourne autour de $z'z$ dans le sens positif ou le sens négatif des rotations.

Si l'on désigne par θ l'angle du vecteur AP avec l'axe $z'z$, on a évidemment $ap = \text{AP} \sin\theta$. Le moment du vecteur AP par rapport à l'axe est donc aussi $\pm \text{AP}.\delta.\sin\theta$, où il faut prendre + ou — suivant qu'un mobile allant de A en P tourne autour de $z'z$ dans le sens positif ou le sens négatif des rotations.

Le moment d'un vecteur par rapport à un axe ne change pas quand on fait glisser le vecteur le long de la droite indéfinie qui le porte. En effet, cette opération ne change aucun des trois facteurs AP, δ, $\sin\theta$, ni le signe à prendre devant le produit.

Si deux vecteurs sont égaux et directement opposés, leurs moments par rapport à un même axe sont égaux et de signes contraires. En effet, les trois facteurs sont les mêmes pour les deux moments ; les signes seuls sont différents.

Cas où le moment est nul. — D'après la dernière expression, le moment par rapport à un axe est le produit de trois facteurs : 1° le vecteur donné ; 2° sa plus courte distance à l'axe ; 3° le sinus de l'angle du vecteur avec l'axe.

Pour que le moment soit nul, il faut et il suffit que l'un de ces facteurs le soit, c'est-à-dire : 1° que le vecteur soit nul ; 2° ou bien qu'il rencontre l'axe ; 3° ou bien qu'il soit parallèle à l'axe.

Dans les deux derniers cas, le vecteur est dans un même plan avec l'axe ; donc pour qu'un vecteur ait un moment nul par rapport à un axe, il faut et il suffit : ou bien que le vecteur soit nul, ou bien qu'il soit dans un même plan avec l'axe.

80. Théorème. — *Le moment d'un vecteur par rapport à un axe est la valeur algébrique de la projection sur cet axe du moment linéaire du vecteur par rapport à un point quelconque pris sur l'axe.* Soit (*fig.* 87) un point quelconque B pris sur l'axe $z'z$; construisons le mo-

ment linéaire BK du vecteur AP par rapport au point B, et projetons ce vecteur en Bk sur l'axe. Il faut montrer que le moment de AP par rapport à l'axe est égal au segment Bk, avec son signe, c'est-à-dire que Bk = Oh en grandeur et signe. On voit d'abord sur la figure que les deux segments Bk et Oh ont même sens, c'est-à-dire même signe. Il reste à voir qu'ils ont même valeur absolue.

Pour cela, appelons α l'angle aigu de BK avec $z'z$; on a en valeur absolue Bk = BK cosα. Mais BK est égal au double de l'aire BAP; donc

$$Bk = 2 BAP \cos\alpha.$$

D'autre part,

$$Oh = 2 Oap;$$

le triangle Oap étant la projection du triangle BAP, on a

$$Oap = BAP \cos\alpha,$$

car l'angle du plan BAP avec le plan de projection est égal à l'angle α des perpendiculaires BK et Oz à ces deux plans. On a donc

$$Oh = 2 BAP \cos\alpha,$$

d'où

$$Bk = Oh.$$

Le théorème est donc démontré.

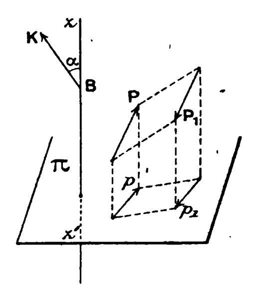
81. Corollaire I. — *Le moment de la résultante de plusieurs vecteurs concourants par rapport à un axe est égal à la somme algébrique des moments de ces vecteurs.* En effet, prenons un point quelconque B sur l'axe; nous avons vu que le moment linéaire du vecteur résultant par rapport au point B est la somme géométrique des moments des vecteurs composants : en projetant sur l'axe, on voit que la projection du moment linéaire du vecteur résultant est égal à la somme des projections des moments linéaires des vecteurs composants; ce qui démontre la proposition.

82. Corollaire II. — *Étant donnés des vecteurs quelconques, la somme de leurs moments par rapport à un axe est égale à la projection sur cet axe du moment résultant par rapport à un point quelconque de l'axe.* En effet, prenons un point quelconque B sur l'axe; par définition, le moment résultant des vecteurs donnés par rapport à B est la somme géométrique des moments linéaires des divers vecteurs par rapport à B. La projection de ce moment résultant sur l'axe est donc égale à la somme des projections des moments linéaires des divers vecteurs sur ce même axe; ce qui démontre la proposition.

83. Corollaire III. — *La somme algébrique des moments des deux vecteurs d'un couple par rapport à un axe est égale à la projection sur cet axe de l'axe du couple.*

Cette proposition est un cas particulier de la précédente. Prenons un point B quelconque sur l'axe des moments; le moment résultant BK ou axe du couple est la somme géométrique des moments linéaires des deux vecteurs du couple par rapport à B. La projection de l'axe BK (*fig.* 88) du couple sur l'axe des moments est donc égale à la somme des projections des moments linéaires des deux vecteurs du couple par rapport à B, c'est-à-dire à la somme des moments des deux vecteurs par rapport à l'axe des moments.

Fig. 88.



Remarque. — Appelons α l'angle du plan du couple PP_1 avec un plan Π perpendiculaire à l'axe des moments; l'axe BK du couple est perpendiculaire au plan du couple et égal à l'aire du parallélogramme PP_1; il fait avec $z'z$ l'angle α. La

somme des moments des deux vecteurs du couple par rapport à $z'z$, étant la projection de l'axe BK sur $z'z$, est égale à BK $\cos\alpha$ ou à *aire* $PP_1 \cos\alpha$, c'est-à-dire à l'aire du parallélogramme pp_1, projection du parallélogramme PP_1 sur le plan Π.

84. Expressions analytiques : 1° Moments d'un vecteur par rapport aux trois axes. — Soient trois axes rectangulaires et un vecteur P_1 appliqué en un point de coordonnées x_1, y_1, z_1 (*fig.* 89). Appelons X_1, Y_1, Z_1 les projections du vecteur sur les trois axes et L_1, M_1, N_1 ses moments par rapport aux trois axes; nous nous proposons de calculer ces trois dernières quantités.

Fig. 89.

Calculons le moment N_1 par rapport à Oz. Projetons le vecteur A_1P_1 en a_1p_1 sur le plan des xy; le moment N_1 par rapport à Oz est le double de l'aire du triangle Oa_1p_1 précédé du signe $+$ ou du signe $-$, suivant qu'un mobile parcourant a_1p_1 tourne autour de Oz dans le sens positif ou le sens négatif des rotations.

Les coordonnées du point a_1 dans le plan xOy sont (x_1, y_1), celles du point p_1 sont $x_2 = x_1 + X_1$, $y_2 = y_1 + Y_1$.

D'après une formule connue, établie en géométrie analytique, le double de l'aire du triangle Oa_1p_1 avec le signe que nous venons de définir est

$$x_1 y_2 - y_1 x_2;$$

on a donc

$$N_1 = x_1(y_1 + Y_1) - y_1(x_1 + X_1) = x_1 Y_1 - y_1 X_1;$$

On trouve de même par permutations les moments par

rapport à Ox et Oy

$$L_1 = y_1 Z_1 - z_1 Y_1,$$
$$M_1 = z_1 X_1 - x_1 Z_1.$$

2° **Moment linéaire d'un vecteur par rapport à l'origine.** — Soit OG_1 le moment linéaire du vecteur par rapport à O. D'après un théorème précédent, la projection de ce moment sur un quelconque des trois axes Ox, Oy, Oz est précisément égale au moment du vecteur par rapport à cet axe.

Les trois projections de OG_1 sur les axes Ox, Oy, Oz sont donc les quantités L_1, M_1, N_1 que nous venons de calculer.

Remarque. — Les six quantités X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1 relatives à un vecteur vérifient l'identité

$$(1) \qquad L_1 X_1 + M_1 Y_1 + N_1 Z_1 = 0,$$

qui devient évidente quand on remplace L_1, M_1, N_1 par leurs expressions.

Cette identité signifie géométriquement que le moment linéaire OG_1 du vecteur par rapport à O est perpendiculaire au vecteur, ce qui est évident par définition même du moment linéaire.

Coordonnées d'un vecteur. — On appelle quelquefois les six quantités X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1 liées par la relation (1) les coordonnées du vecteur A_1P_1. A chaque vecteur correspondent ainsi six coordonnées qui ne changent d'ailleurs pas de valeur quand on fait glisser ce vecteur le long de la droite indéfinie qui le porte.

Réciproquement, à six nombres quelconques X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1 vérifiant la relation (1) et tels que $X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2$ ne soit pas nul, correspondent une infinité de vecteurs qui se déduisent tous de l'un d'eux en le faisant glisser le long de la droite indéfinie qui le porte. C'est ce qu'on pourra démontrer à titre d'exercice.

D. — STATIQUE DES CORPS SOLIDES LIBRES.

85. Équilibre des corps libres. — En Physique, on divise les corps de la nature en solides, liquides et gazeux. Nous nous occuperons ici des corps naturels appelés *solides*, comme une pierre, un morceau de métal, un morceau de caoutchouc, etc. Un solide naturel est dit entièrement libre quand aucun obstacle extérieur ne gêne son mouvement.

Par exemple, une pierre posée sur une table n'est pas entièrement libre, car la table empêche par sa résistance certains mouvements; une porte n'est pas entièrement libre, car son articulation avec les gonds empêche certains mouvements.

Nous nous occuperons d'abord des solides entièrement libres, puis nous donnerons quelques exemples de solides gênés.

On dit qu'une force est appliquée à un corps solide quand elle agit sur un des points matériels dont l'ensemble constitue le corps solide. Ce point s'appelle le *point d'application de la force*.

On dit qu'un corps solide sollicité par plusieurs forces est en équilibre quand ce corps, abandonné à lui-même, sans vitesse, sous l'action des forces, *reste immobile sans se déformer*.

Il est évident qu'un corps solide libre sollicité par une seule force ne saurait être en équilibre. Le cas d'équilibre le plus simple possible est donc le cas d'un corps sollicité par deux forces.

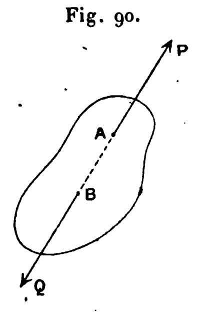
86. Corps libre sollicité par deux forces. — Soit un corps libre sollicité par deux forces P et Q (*fig.* 90) appliquées en deux points A et B. Nous regarderons comme évident que, pour que le solide soit en équilibre, *il faut que les deux forces* P *et* Q *soient égales et directement opposées*,

c'est-à-dire égales, parallèles, de sens contraires et dirigées suivant la droite AB joignant leurs points d'application.

Cette condition nécessaire de l'équilibre n'est pas toujours suffisante.

Par exemple, si aux deux extrémités d'un fil élastique on applique deux forces égales et directement opposées, dirigées de façon à tendre le fil, elles ne se font pas immédiatement équilibre : le fil s'allonge, par conséquent se déforme, et prend, seulement après cette déformation, un certain état d'équilibre ; il peut même arriver, si les forces sont trop grandes, que le fil se rompe.

Fig. 90.



Une tige métallique soumise à ses deux extrémités à des pressions égales et directement opposées est en équilibre si ces pressions ne dépassent pas certaines limites ; mais si ces pressions sont trop grandes, la tige peut fléchir, etc.

Nous admettrons, dans tout ce qui suit, que les forces appliquées aux corps considérés sont assez petites et que ces corps eux-mêmes sont assez rigides pour qu'il n'y ait pas rupture et que la déformation soit négligeable. Alors la condition d'équilibre indiquée plus haut comme nécessaire est également *suffisante*.

En résumé, avec les rectrictions que nous venons d'indiquer, *la condition nécessaire et suffisante pour que deux forces appliquées à un solide libre se fassent équilibre est qu'elles soient égales et directement opposées.*

87. Principe. — Nous admettrons comme un fait résultant de ce qui précède que, si un corps solide est sollicité par des forces en nombre quelconque, on peut, sans changer son état, ajouter aux forces qui agissent déjà deux forces égales

et directement opposées, ou supprimer l'ensemble de deux forces égales et directement opposées s'il se rencontre un ensemble de ce genre.

88. Opérations élémentaires. — On peut, sans changer l'état d'un corps solide sollicité par des forces en nombre quelconque, leur faire subir les opérations suivantes que nous appellerons *opérations élémentaires :*

1° *On peut, sans changer l'état d'un solide, ajouter ou enlever un système de deux forces égales et directement opposées.*

2° *On peut, sans changer l'effet d'une force appliquée à un solide, la transporter en un point quelconque de sa ligne d'action, pourvu que ce nouveau point soit invariablement lié au solide.*

Fig. 91.

P

A

P'

B

-P'

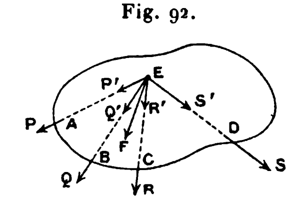
En effet, soit entre autres une force P appliquée en un point A d'un solide; prolongeons indéfiniment la ligne d'action AP de cette force et prenons sur cette ligne un point B quelconque invariablement lié au corps. Nous pouvons, sans changer l'état du corps, appliquer en B deux forces égales et directement opposées dont l'une, P', est égale à P en grandeur, direction, sens, et l'autre, — P', égale et directement opposée. Mais alors nous pouvons de nouveau, sans changer l'état du corps, supprimer les deux forces P et — P', égales et directement opposées; nous avons donc, sans changer l'état du corps, remplacé la force AP par la nouvelle force BP' obtenue en transportant AP en un point de sa ligne d'action (*fig.* 91).

3° *On peut, sans changer l'état d'un solide, remplacer des forces concourantes par leur résultante, ou décomposer une force en des forces concourantes.*

Ce fait résulte de la composition et de la décomposition des forces appliquées à un point matériel.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait, entre autres, quatre forces P, Q, R, S (*fig.* 92) appliquées en quatre points A, B, C, D d'un solide de telle façon que leurs lignes d'action prolongées concourent en un même point E. Nous pouvons d'abord, d'après l'opération précédente, transporter chacune de ces forces au point E de sa ligne d'action et amener ainsi les quatre forces en P′, Q′, R′, S′. Mais alors les quatre forces sont appliquées à un même point matériel E et peuvent être remplacées par leur somme géométrique ou résultante F. Inversement, étant donnée une force F appliquée en E, on peut toujours la décomposer en forces appliquées au même point et ensuite transporter chacune de ces composantes en un point quelconque de sa ligne d'action.

Fig. 92.



Remarque. — Il pourrait arriver que les directions prolongées des forces concourantes P, Q, R, S se coupent en un point E ne faisant pas partie du corps : dans ce cas, pour pouvoir faire le raisonnement, il faut imaginer que l'on place en E un point matériel et que l'on relie invariablement ce nouveau point au corps.

89. Invariance de la somme géométrique des forces et de leur moment résultant par rapport à un point. — Étant données des forces F_1, F_2, ..., F_n appliquées à un solide, ces forces forment un système de vecteurs auquel on peut appliquer les constructions géométriques du n° 77.

Faisons choix d'un point O et construisons la somme géométrique OR et le moment résultant OG des forces par rap-

port à ce point. Pour cela, nous mènerons par O des vecteurs OF'_1, OF'_2, ..., OF'_n égaux et parallèles aux forces; la somme OR de ces vecteurs sera la somme géométrique des forces. Puis nous construirons les moments linéaires OG_1, OG_2, ..., OG_n des forces par rapport à O; leur somme géométrique OG sera le moment résultant des forces par rapport à O.

Ces définitions rappelées, on a le théorème suivant :

Les opérations élémentaires n'altèrent pas ces deux vecteurs.

En d'autres termes, si, en employant ces opérations, on transforme le système de forces en un autre, *ce nouveau système a la même somme géométrique* OR *et le même moment résultant* OG *que le premier.*

Pour le montrer, il suffit de montrer que les vecteurs OR et OG ne changent pas par l'effet de chacune des opérations élémentaires.

1° Quand on ajoute ou qu'on supprime deux forces égales et directement opposées, on ajoute ou l'on supprime à chacun des systèmes de vecteurs concourants ayant pour sommes géométriques OR et OG, deux vecteurs égaux et directement opposés, ce qui n'altère évidemment pas ces sommes.

2° Quand on transporte une force en un point de sa ligne d'action, on n'altère ni le vecteur égal et parallèle mené par O, ni le moment linéaire de cette force relatif au point O.

3° Quand on remplace plusieurs forces concourantes F_1, F_2, ..., F_k par leur résultante Q, on doit remplacer, dans la construction de la somme géométrique OR de toutes les forces F_1, F_2, ..., F_k, ..., F_n, les vecteurs OF'_1, OF'_2, ..., OF'_k, égaux et parallèles à F_1, F_2, ..., F_k, par le vecteur OQ' égal et parallèle à leur résultante Q; mais, comme OQ' est la somme géométrique de OF'_1, OF'_2, ..., OF'_k, cette opération

revient à remplacer une partie des vecteurs concourants dont la somme géométrique est OR par leur somme, ce qui n'altère pas OR.

De même, quand on remplace plusieurs forces concourantes F_1, F_2, ..., F_k par leur résultante Q, on doit remplacer, dans la construction du moment résultant OG de toutes les forces, les moments linéaires OG_1, OG_2, ..., OG_k des forces F_1, F_2, ..., F_k par le moment OH de leur résultante Q; mais comme le moment OH de la résultante de vecteurs concourants est égal à la somme des moments linéaires des composantes, cette opération revient à remplacer une partie des vecteurs concourants dont la somme est OG par leur somme géométrique, ce qui n'altère pas OG.

Le théorème est donc démontré.

90. Réduction à deux des forces appliquées à un corps solide. — A l'aide des opérations élémentaires, on peut, d'une infinité de manières, transformer un système de forces appliquées à un solide sans changer son état.

On peut alors chercher à réduire, au moindre nombre possible, des forces en nombre quelconque appliquées à un solide. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *On peut, sans changer l'état d'un solide, remplacer des forces en nombre quelconque qui lui sont appliquées par deux dont l'une est appliquée en un point arbitrairement choisi.*

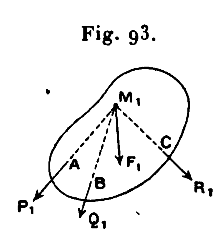
Pour cela, nous établirons une proposition préliminaire.

Lemme. — *On peut toujours réduire des forces appliquées à un solide à trois forces appliquées en trois points arbitraires du corps non en ligne droite.*

En effet, soient A, B, C trois points non en ligne droite

arbitrairement choisis dans le corps, et F_1 une des forces considérées (*fig.* 93). En laissant de côté le cas exceptionnel où cette force serait tout entière dans le plan ABC, on peut toujours, en la transportant en un point de sa ligne d'action, la supposer appliquée en un point M_1 en dehors du plan ABC. Les trois directions M_1A, M_1B, M_1C forment alors un trièdre : on peut donc décomposer la force F_1 en trois autres suivant ces trois directions et transporter ensuite les points d'application de ces trois composantes aux points A, B, C de leurs lignes d'action.

Fig. 93.



On obtient ainsi, pour remplacer F_1, trois forces P_1, Q_1, R_1 appliquées respectivement en A, B, C.

Dans le cas exceptionnel où la force F_1 serait dans le plan ABC, elle serait dans un même plan avec les trois droites M_1A, M_1B, M_1C; on pourrait alors la décomposer en deux dirigées suivant deux de ces droites, M_1A et M_1B par exemple, et transporter ces deux composantes en P_1 et Q_1 aux points A et B; on aurait donc le même résultat que dans le cas général, seulement R_1 serait nulle.

Après avoir fait cette opération pour chacune des forces considérées, on a, appliqués aux points A, B, C, trois systèmes de forces concourantes. Chacun de ces systèmes peut être remplacé par sa résultante, et l'on a finalement trois forces P, Q, R appliquées aux points arbitraires A, B, C. Le lemme est ainsi démontré.

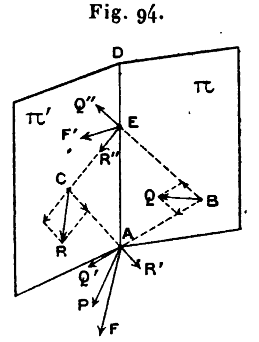
Démontrons maintenant le théorème en montrant que ces trois forces peuvent se réduire à deux.

Par le point A et la force BQ faisons passer un plan Π; par le même point A et la force CR faisons passer un plan Π'. Ces deux plans, ayant le point A commun, ont en commun au moins une droite AD (*fig.* 94).

Sur cette droite, prenons un point quelconque E distinct

de A, puis joignons BA, BE et CA, CE. La force Q et les deux droites BA, BE sont dans un même plan Π; on peut donc décomposer Q en deux composantes dirigées suivant ces deux droites, puis transporter respectivement ces composantes aux points A et E en Q′ et Q″.

Fig. 94.



On peut de même décomposer R en deux composantes suivant CA et CE, puis transporter ces composantes aux points A et E en R′ et R″. On a alors, au point A, trois forces P, Q′, R′ qu'on peut composer en une seule F′, et au point E deux forces Q″ et R″ qu'on peut composer en une seule F″.

Finalement, les forces considérées ont été ainsi remplacées par deux F′ et F″ dont l'une est appliquée en un point A, pris à volonté. Le point E n'est pas pris à volonté; une fois A choisi, le point E doit être pris sur la droite AD, qui varie avec le choix des deux autres points B et C.

91. Théorème. — *Les forces* F_1, F_2, ..., F_n *appliquées à un solide, étant réduites à deux,* F′ *et* F″, *par les opérations élémentaires, ces deux forces ont même somme géométrique* OR *et même moment résultant* OG *par rapport à un point quelconque* O *que les forces* F_1, F_2, ..., F_n *d'où elles émanent.*

Ce théorème est un cas particulier du théorème sur l'invariance des vecteurs OR et OG *par l'effet des opérations élémentaires* (n° 89).

92. Conditions géométriques d'équilibre. — Pour qu'un corps solide soumis à des forces F_1, F_2, ..., F_n soit en équilibre, il faut et il suffit que les deux forces finales F′ et F″

auxquelles on peut réduire ces forces se fassent équilibre. *Pour cela il faut et il suffit que ces deux forces soient égales et directement opposées.*

On peut dire aussi : *pour l'équilibre il faut et il suffit que la somme géométrique* OR *des forces et leur moment résultant* OG *relatifs à un point* O *soient nuls.*

En effet, nous venons de voir que OR et OG sont la somme géométrique et le moment résultant des deux forces finales F′ et F″.

1° S'il y a équilibre, F′ et F″ sont égales et directement opposées : leur somme géométrique OR et leur moment résultant OG sont nuls ; la condition est donc nécessaire.

2° Si OR et OG sont nuls, les forces F′ et F″ sont égales et directement opposées et l'équilibre a lieu ; d'abord OR étant nul, les forces F′ et F″ ont une somme géométrique nulle, elles sont égales et opposées et forment un couple de vecteurs ; leur moment résultant OG par rapport à O est l'axe de ce couple (n° 78) ; mais OG est supposé nul, le moment de ce couple est nul, donc, ou bien les forces du couple sont nulles, ou bien le bras de levier du couple est nul et les deux forces sont égales et directement opposées. L'équilibre a donc lieu, et la condition est suffisante.

Remarque. — D'après cela, si la somme géométrique et le moment résultant d'un système sont nuls par rapport à un point déterminé de l'espace, le système est en équilibre et les mêmes éléments sont nuls par rapport à tous les points de l'espace.

93. Système de forces équivalent à zéro. — On dit qu'un système de forces est équivalent à zéro, quand sa somme géométrique et son moment résultant sont nuls. D'après cette définition, pour qu'un système de forces soit en équilibre sur un solide, il faut et il suffit qu'il soit équivalent

à zéro. On peut par les opérations élémentaires réduire un système équivalent à zéro à deux forces égales et directement opposées; mais, par une dernière opération élémentaire, on peut supprimer ces deux forces et réduire ce système *à rien* en admettant, bien entendu, que les conditions physiques du n° 86 soient réalisées.

94. Conditions analytiques d'équilibre. — Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires; pour définir les n forces F_1, F_2, ..., F_n appliquées au solide, appelons (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), ..., (X_n, Y_n, Z_n) les projections respectives de ces forces sur les trois axes et (L_1, M_1, N_1), (L_2, M_2, N_2), ..., (L_n, M_n, N_n), leurs moments respectifs par rapport aux trois axes.

Construisons la somme géométrique OR et le moment résultant OG de ces forces par rapport au point O et appelons X, Y, Z et L, M, N les projections respectives de ces deux vecteurs sur les trois axes. On aura, d'après la définition même de ces deux vecteurs

$$(\text{OR}) \qquad \begin{cases} X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \\ Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n, \\ Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n. \end{cases}$$

$$(\text{OG}) \qquad \begin{cases} L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n, \\ M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n, \\ N = N_1 + N_2 + \ldots + N_n. \end{cases}$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que OR et OG soient nuls, donc il faut et il suffit que l'on ait les six équations

$$(\text{Équilibre}) \quad \begin{cases} X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \\ L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0. \end{cases}$$

On peut énoncer ces six conditions en disant : *pour que des forces appliquées à un solide se fassent équilibre, il*

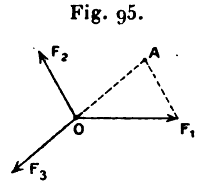
faut et il suffit (sous les restrictions indiquées au début) *que la somme de leurs projections sur chacun des trois axes de coordonnées soit nulle et que la somme de leurs moments par rapport à chacun de ces axes soit nulle.*

95. Cas particulier : équilibre de forces concourantes. — Dans ce cas, on peut transporter les forces au point de concours et les réduire à une. Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que la somme géométrique des forces soit nulle. Analytiquement, en prenant le point de concours pour origine, on voit que L, M, N sont nuls d'eux-mêmes, et il suffit d'écrire les trois conditions

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

Trois forces concourantes. — Supposons qu'il y ait seulement trois forces concourantes (*fig.* 95). Pour qu'elles se fassent équilibre, il faut et il suffit que leur somme géométrique soit nulle, c'est-à-dire qu'elles soient parallèles et égales aux côtés d'un triangle OF_1A parcourus dans un même sens de circulation. On peut dire aussi en s'appuyant sur ce que, dans un triangle, chaque côté est proportionnel au sinus de l'angle des deux autres : Il faut et il suffit :

Fig. 95.



1° Que les trois forces concourantes soient dans un même plan;

2° Que chacune d'elles soit à l'extérieur de l'angle des deux autres ;

3° Que l'intensité de chacune d'elles soit proportionnelle au sinus de l'angle des deux autres

$$\frac{F_1}{\sin(F_2F_3)} = \frac{F_2}{\sin(F_3F_1)} = \frac{F_3}{\sin(F_1F_2)}.$$

96. Cas particulier : équilibre de forces situées dans

un même plan. — Soit un corps solide sollicité par des forces F_1, F_2, ..., F_n situées dans un plan fixe que nous prenons pour plan des xy. Dans ce cas, la somme géométrique des forces OR est évidemment dans ce plan, et leur moment résultant OG est normal au plan.

Au point de vue analytique, en employant les mêmes notations que dans le cas général, on voit que les projections Z_1, $Z_2, \ldots, Z_n$ des composantes sur Oz sont toutes nulles; de même les moments L_1, L_2, ..., L_n, M_1, M_2, ..., M_n des composantes par rapport aux axes Ox et Oy sont nuls, puisque toutes les forces sont dans un même plan avec chacun de ces axes.

On a alors pour les projections de OR et OG

$$(\mathrm{OR}) \qquad \begin{cases} X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \\ Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n, \\ Z = 0. \end{cases}$$

$$(\mathrm{OG}) \qquad \begin{cases} L = 0, \\ M = 0, \\ N = N_1 + N_2 + \ldots + N_n. \end{cases}$$

Conditions d'équilibre. — Sur les six conditions du cas général on voit que trois sont remplies d'elles-mêmes; et il restera à écrire les trois conditions

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + \ldots + X_n &= 0, \\ Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n &= 0, \\ N_1 + N_2 + \ldots + N_n &= 0. \end{aligned}$$

La somme des projections des forces sur chacun des axes Ox et Oy situés dans le plan des forces doit être nulle; et la somme de leurs moments par rapport à l'axe Oz perpendiculaire à ce plan doit être nulle.

97. Cas particulier : équilibre de forces parallèles. — Considérons le cas particulier où les forces appliquées à un solide sont parallèles à une même direction, les unes tirant dans un sens, les autres en sens contraire.

Soient α, β, γ les cosinus directeurs d'une demi-droite parallèle à la direction commune des forces. Appelons P_1, P_2, ..., P_n les grandeurs des forces *estimées positivement suivant cette demi-droite*, de sorte que les forces dirigées dans le sens de cette demi-droite seront positives, et les forces dirigées en sens contraires négatives. On aura, en appelant x_k, y_k, z_k les coordonnées du point d'application de la force P_k, X_k, Y_k, Z_k ses projections sur les axes supposés rectangulaires, et L_k, M_k, N_k ses moments par rapport aux axes,

$$X_k = \alpha P_k, \qquad Y_k = \beta P_k, \qquad Z_k = \gamma P_k;$$
$$L_k = P_k(\gamma y_k - \beta z_k),$$
$$M_k = P_k(\alpha z_k - \gamma x_k),$$
$$N_k = P_k(\beta x_k - \alpha y_k).$$

Puis, en posant

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = \Sigma P_k,$$

le signe Σ indiquant une somme étendue à tous les vecteurs, on a, pour les projections de la somme géométrique et du moment résultant par rapport à O

$$X = \alpha P, \qquad Y = \beta P, \qquad Z = \gamma P;$$
$$L = \gamma \Sigma P_k y_k - \beta \Sigma P_k z_k,$$
$$M = \alpha \Sigma P_k z_k - \gamma \Sigma P_k x_k,$$
$$N = \beta \Sigma P_k x_k - \alpha \Sigma P_k y_k.$$

On voit immédiatement par la Géométrie que la somme géométrique des forces leur est parallèle et que leur moment résultant leur est perpendiculaire; c'est ce qu'on vérifie analytiquement en remarquant que les valeurs ci-dessus de X, Y, Z, L, M, N satisfont à l'identité

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Conditions d'équilibre. — En écrivant les six conditions d'équilibre du cas général, on voit qu'elles se réduisent

actuellement aux trois suivantes

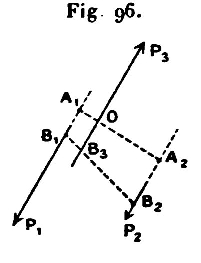
$$\Sigma P_k = 0, \qquad \frac{\Sigma P_k x_k}{\alpha} = \frac{\Sigma P_k y_k}{\beta} = \frac{\Sigma P_k z_k}{\gamma}.$$

Par exemple, si l'on a choisi l'axe Oz parallèle à la direction commune des forces ($\beta = \gamma = 0$), on a les trois conditions

$$\Sigma P_k = 0. \qquad \Sigma P_k y_k = 0, \qquad \Sigma P_k z_k = 0.$$

Équilibre de trois forces parallèles. — Prenons, pour traiter le cas le plus simple, *trois forces parallèles* et cherchons les conditions d'équilibre.

Fig. 96.



Sur les trois forces, deux auront le même sens que nous regarderons comme positif, la troisième le sens contraire. Les intensités P_1 et P_2 des deux premières seront positives (*fig.* 96); l'intensité P_3 de la troisième, négative. D'abord, la condition que la somme géométrique des forces soit nulle exige que la force qui tire seule dans un sens soit égale en valeur absolue à la somme des deux qui tirent en sens contraire, ou encore que leur somme algébrique soit nulle

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0.$$

Il faut maintenant exprimer que le moment résultant par rapport à un point O est nul. Prenons ce point sur P_3. Le moment linéaire de P_3 est nul; les moments linéaires OG_1 et OG_2 de P_1 et P_2 sont perpendiculaires aux plans OP_1 et OP_2; pour que leur somme géométrique soit nulle, il faut et il suffit qu'ils soient dirigés suivant la même droite, en sens contraires, et égaux en valeur absolue.

Il faut donc d'abord que les perpendiculaires aux plans OP_1 et OP_2 coïncident, c'est-à-dire que ces plans eux-mêmes coïncident et que P_3 soit dans le plan P_1P_2. Puis, pour que les deux moments OG_1 et OG_2 soient de sens contraire, il

faut et il suffit que O, c'est-à-dire P_3, soit entre P_1 et P_2; enfin, pour que ces moments soient égaux, il faut et il suffit que

$$P_1 . OA_1 = P_2 . OA_2,$$

OA_1 et OA_2 étant les distances de O aux forces P_1 et P_2. En menant une transversale quelconque B_1, B_2, B_3 aux trois forces, on peut remplacer cette dernière condition par

$$P_1 . B_3 B_1 = P_2 . B_3 B_2,$$

car, on a évidemment

$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{B_3 B_1}{B_3 B_2}.$$

En résumé, pour que trois forces parallèles se fassent équilibre, il faut et il suffit :

1° Que la force P_3, qui est seule de son sens, soit égale en valeur absolue à la somme des deux autres;

2° Qu'elle soit entre ces deux forces dans leur plan;

3° Que les segments dans lesquels la force P_3 coupe une transversale aux trois forces soient inversement proportionnels aux forces P_1 et P_2.

Remarque. — On peut exprimer, sous une forme symétrique, les conditions d'équilibre, en donnant aussi des signes aux trois segments déterminés par les points B_1, B_2, B_3 sur une transversale aux trois forces.

Alors il faut et il suffit que, pour l'équilibre, les trois forces soient dans un même plan et que l'on ait *en grandeur et signe*

$$(1) \qquad \frac{P_1}{B_2 B_3} = \frac{P_2}{B_3 B_1} = \frac{P_3}{B_1 B_2},$$

où chaque rapport se déduit du précédent par la permutation circulaire des indices.

En effet, comme les trois segments aux dénominateurs vérifient la relation (n° 2)

$$B_2B_3 + B_3B_1 + B_1B_2 = 0,$$

les forces vérifieront la même relation

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0,$$

et, en outre, elles auront la disposition exigée par l'énoncé.

La proportion (1) signifie que chaque force est proportionnelle au segment de transversale compris entre les deux autres.

98. Cas particulier : Équilibre de trois forces quelconques. — Cherchons, en particulier, les conditions d'équilibre de trois forces P, Q, R appliquées à un corps solide.

Tout d'abord, pour qu'il y ait équilibre, il faut que les trois forces soient dans un même plan. En effet, considérons une droite AB s'appuyant en A et B respectivement sur les lignes d'action de P et Q. Il faut que la somme des moments des forces P, Q, R, par rapport à cette droite AB, soit nulle, car on peut toujours imaginer qu'on ait pris AB pour un des axes de coordonnées. Mais les moments des forces P et Q par rapport à AB sont nuls, car ces forces rencontrent AB; il faut donc que le moment de R soit nul aussi, c'est-à-dire que la ligne d'action de cette force R rencontre AB ou lui soit parallèle. Ainsi toute droite AB s'appuyant sur deux des forces doit rencontrer aussi la troisième à distance finie ou infinie; ce qui exige que les trois forces soient dans un même plan.

Supposons cette première condition remplie, deux cas peuvent se présenter :

1° Deux des forces P et Q sont concourantes; on peut alors les composer en une seule R'; pour qu'il y ait équilibre il faut et il suffit que la troisième force R soit égale et opposée à R'. Donc si deux des forces concourent, il faut et il suffit,

pour l'équilibre, que les trois soient concourantes et remplissent les conditions d'équilibre de trois forces concourantes (n° 95).

2° Les trois forces P, Q, R sont parallèles; elles devront alors remplir les conditions d'équilibre de trois forces parallèles (n° 97).

En résumé, pour que trois forces se fassent équilibre sur un solide, il faut qu'elles soient dans un même plan, que, dans ce plan, elles soient concourantes ou parallèles et remplissent, par suite, les conditions d'équilibre de trois forces concourantes ou parallèles.

99. Conditions d'équivalence de deux systèmes de forces. — Imaginons un solide et deux systèmes de forces (S) et (S′) appliquées successivement à ce solide; le premier (S) étant formé de n forces F_1, F_2, ..., F_n; le deuxième de n' forces F'_1, F'_2, ..., $F'_{n'}$. Construisons les sommes géométriques OR et OR′ et les moments résultants OG et OG′ de ces deux systèmes par rapport à un point arbitraire O.

On dit que *les deux systèmes sont équivalents quand ils peuvent être remplacés l'un par l'autre sans changer l'état du corps solide.*

Théorème. — *Pour que deux systèmes de forces soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient même somme géométrique et même moment résultant par rapport à un point* O

$$OR' = OR, \qquad OG' = OG.$$

1° La condition est nécessaire. En effet, considérons le système auxiliaire (— S) formé de toutes les forces de (S) *changées de sens;* ce nouveau système a pour somme géométrique et pour moment résultant par rapport à O des vecteurs (— R) et (— G) égaux et opposés à R et G. Ce sys-

tème (— S) est évidemment tenu en équilibre par le système (S); il l'est donc aussi par le système (S′) qui, par hypothèse, produit le même effet que (S). Donc l'ensemble des deux systèmes (— S) et (S′) forme un système de forces en équilibre, c'est-à-dire un système équivalent à zéro.

La somme géométrique de toutes les forces de cet ensemble est la différence géométrique

$$(OR') - (OR),$$

et leur moment résultant, la différence géométrique

$$(OG') - (OG).$$

Comme cet ensemble est en équilibre, sa somme géométrique et son moment résultant sont nuls, et l'on a, géométriquement

$$OR' = OR, \qquad OG' = OG.$$

2° *La condition est suffisante*. En effet, si l'on a

$$OR' = OR, \qquad OG' = OG$$

en grandeur, direction et sens, l'ensemble formé des systèmes (— S) et (S′) est en équilibre et peut, par suite, par les opérations élémentaires être réduit à *zéro* (n° 93).

Cela posé, nous allons montrer que l'on peut passer du système (S′) au système (S) par les opérations élémentaires; il sera alors établi que l'on peut remplacer (S′) par (S) sans changer l'état du corps.

En effet, partons du système (S′) supposé être appliqué seul au corps solide; nous pouvons, sans changer l'état du corps, ajouter les deux systèmes (S) et (— S) dont l'ensemble est formé de forces deux à deux égales et directement opposées; le corps est alors sollicité simultanément par les trois systèmes de forces (S′), (S) et (— S). Mais l'ensemble (S′) et (— S) peut, par les opérations élémentaires, être réduit à

zéro et, finalement, il reste le système (S). On passe donc bien de (S′) à (S) par les seules opérations élémentaires.

Remarque I. — Nous avons montré au n° 89 que les opérations élémentaires n'altèrent ni la somme géométrique ni le moment résultant. Nous venons de démontrer la réciproque : toutes les fois qu'on aura deux systèmes de forces ayant même somme géométrique et même moment résultant, on pourra passer de l'un à l'autre par ces opérations élémentaires et, par suite, les remplacer l'un par l'autre.

Remarque II. — Si deux systèmes de forces ont la même somme géométrique et le même moment résultant pour un point particulier, ils sont équivalents; par suite, leurs moments résultants sont aussi égaux par rapport à tout autre point de l'espace.

Expression analytique de l'équivalence. — Prenons le le point O pour origine; soient X, Y, Z; L, M, N les projections de la somme OR et du moment résultant OG du premier système; X′, Y′, Z′; L′, M′, N′, les quantités analogues pour le second. L'équivalence s'exprime par les six conditions

$$X = X', \quad Y = Y', \quad Z = Z', \quad L = L', \quad M = M'. \quad N = N'.$$

Pour que deux systèmes de forces soient équivalents, il faut et il suffit que les sommes de leurs projections sur chacun des axes et les sommes de leurs moments par rapport à chacun des axes soient égales.

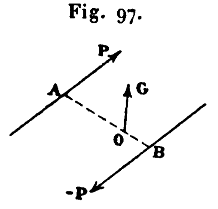
100. Exemple de systèmes équivalents : couples; composition des couples. — Un couple est un système de deux forces P et — P égales et opposées (n° 78).

Le bras de levier du couple est la distance AB (*fig.* 97) des deux forces; le moment du couple est le produit AB.P du bras de levier par une des forces. Quand le moment est

nul, le couple est équivalent à zéro; car, ou bien les deux forces sont nulles, ou bien $AB = o$ et alors les deux forces sont égales et *directement* opposées.

Un couple est un système de forces dont la somme géométrique est *nulle,* et dont le moment *résultant est constant en grandeur, direction et sens pour tous les points de l'espace* (n° 78). Ce moment résultant s'appelle l'*axe du couple.* L'axe d'un couple est donc un vecteur défini en grandeur, direction et sens, mais *dont le point d'application peut être choisi arbitrairement dans l'espace.* Pour retrouver ce vecteur, cherchons le moment résultant par rapport à un point O du bras de levier AB situé entre A et B; les moments des deux forces P et — P seront dirigés perpendiculairement au plan du couple, *dans le même sens,* car les deux vecteurs P et — P *ont le même sens de rotation* autour du point O; le moment résultant OG ou *axe du couple* est donc perpendiculaire au plan du couple et égal à $P.\overline{OA} + P.\overline{OB}$, ou à $P.\overline{AB}$, c'est-à-dire au moment du couple.

Fig. 97.



Théorème I. — *Deux couples de même axe sont équivalents,* car ils ont tous deux une somme géométrique nulle et même moment résultant. Ils pourront donc être réduits l'un à l'autre par les opérations élémentaires. Comme cette proposition est d'une grande importance, nous nous y arrêterons un instant. Elle nous apprend qu'on peut, sans changer l'effet d'un couple, le transporter parallèlement à lui-même dans un plan ou dans des plans parallèles, le faire tourner dans un de ces plans, enfin modifier son bras de levier et ses forces, pourvu qu'on ne change ni son moment ni son sens de rotation, c'est-à-dire qu'on n'altère pas son axe.

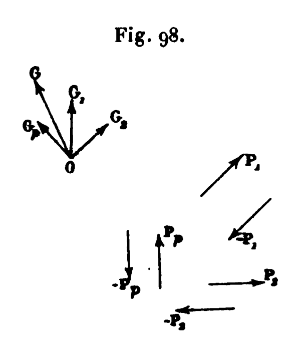
Théorème II (Composition des couples). — *Un nombre*

quelconque de couples est toujours équivalent à un couple unique dont l'axe est la somme géométrique des axes des couples composants.

En effet, le système formé par p couples P_1, $-P_1$; P_2, $-P_2$; ..., P_p, $-P_p$ est un système de vecteurs dont la somme géométrique est nulle. Le moment résultant de ce système est le même par rapport à tous les points de l'espace (*fig.* 98).

En effet, pour obtenir ce moment résultant OG, par rapport au point O, on peut procéder comme il suit : on prend d'abord le moment résultant OG_1 de P_1 et $-P_1$, moment qui est égal à l'axe du premier couple, puis le moment résultant OG_2 de P_2 et $-P_2$, qui est égal à l'axe du second couple, et ainsi de suite jusqu'à OG_p, qui est l'axe du dernier couple; puis on compose entre eux tous ces moments composants OG_1, OG_2, ..., OG_p. Considérons alors un couple d'axe OG égal au moment résultant; ce couple unique est équivalent au système des couples donnés, car il a, comme ce système, une somme géométrique nulle, et un moment résultant égal à OG. On pourra, par les opérations élémentaires, réduire le système de couples donnés au couple unique d'axe OG.

Fig. 98.



Couples en équilibre. — Si $OG = 0$, le couple final est équivalent à zéro; le système proposé également. Les couples se font alors équilibre.

101. Cas général : Réduction à une force et à un couple. — *Un système de forces quelconques est équivalent à une force unique égale à leur somme géométrique, ap-*

pliquée en un point arbitraire et à un couple unique dont l'axe est le moment résultant par rapport à ce point. En effet, soit OR la somme géométrique des forces et OG leur moment résultant du système par rapport à un point arbitraire O. Le nouveau système formé par la force R et un couple (P, — P) d'axe OG est équivalent au système proposé, car il a même somme géométrique OR et même moment résultant OG par rapport au point O (*fig.* 99). Le système proposé pourra donc être réduit au système R, P, — P par les opérations élémentaires.

Comme le point O est pris à volonté, il y a une infinité de façons de déterminer une force et un couple équivalents à un système donné. Une fois le point O choisi, les forces du couple (P, — P) ne sont pas entièrement déterminées, puisqu'on peut prendre pour ce couple l'un quelconque des couples équivalents en nombre infini ayant OG pour axe.

Fig. 99.

Pour que les forces données se fassent équilibre, il faut et il suffit que OR et OG soient nuls, c'est-à-dire que la force R et le couple (P, — P) soient nuls séparément.

On voit, d'après cela, qu'une force et un couple ne peuvent se faire équilibre que si la force et le couple sont nuls séparément.

102. Cas particuliers de la réduction. — Cherchons, en particulier, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système de forces (S) soit équivalent à un couple unique ou à une force unique.

1° *Pour qu'un système soit équivalent à un couple unique, il faut et il suffit que la somme géométrique des forces soit nulle.*

Cette condition est nécessaire, car dans un couple la

somme géométrique des deux forces est nulle; elle est évidemment suffisante.

2° *Pour qu'un système de forces soit équivalent à une force unique, il faut et il suffit que la somme géométrique des forces ne soit pas nulle et que le moment résultant soit perpendiculaire à la direction de cette somme.*

La condition est nécessaire : en effet, soit un système de forces (S) équivalent à une force unique R′. Le système (S) a même somme géométrique et même moment résultant que la seule force R′. Donc, la somme géométrique OR de ce système est égale et parallèle à R′, et le moment résultant OG de ce système est identique au moment linéaire de R′; mais ce moment linéaire OG est perpendiculaire à R′, c'est-à-dire à sa parallèle OR.

La condition est suffisante. Soit un système dans lequel le moment résultant OG est perpendiculaire à la somme géométrique OR : il faut montrer que ce système est équivalent à un vecteur unique, parallèle à OR. En effet, considérons le plan Π (*fig.* 100), mené par O perpendiculairement à OG, plan qui contient OR; traçons dans ce plan un vecteur R′ égal et parallèle à OR, de même sens que OR, de telle façon que le moment linéaire de ce vecteur par rapport à O soit OG. Ce vecteur R′ est à une distance OA de O déterminée par la condition

Fig. 100.

$$OA \cdot R' = OG,$$

et le sens de OG indique de quel côté de O il faut placer R′. Dès lors le système proposé est équivalent à la force unique R′, car la somme géométrique de cette force est OR et son moment résultant en O est OG.

On peut caractériser la ligne d'action de cette force unique R′, équivalente au système, en disant que c'est *le lieu des points* P *pour lesquels le moment résultant du système est nul.* En effet, le système donné et la force R′ étant équivalents, leur moment résultant est le même pour tout point de l'espace; et pour un point pris sur R′, le moment de R′ est nul, et réciproquement.

Remarque. — Le système donné est équivalent à une force OR et à un couple d'axe OG. On peut alors interpréter le résultat que nous venons d'obtenir en disant que pour que l'ensemble d'une force OR et d'un couple d'axe OG puisse se réduire à une force unique, il faut et il suffit que l'axe du couple soit perpendiculaire à la force; l'ensemble se réduit alors à une force R′ égale et parallèle à OR.

Expressions analytiques. — Pour terminer l'examen de ces cas particuliers, voyons quelles sont, au point de vue analytique, les conditions pour qu'un de ces cas se présente. Soient

$$X, Y, Z \quad \text{et} \quad L, M, N$$

les projections sur les axes de la somme géométrique OR et du moment résultant OG d'un système par rapport à l'origine. Ce système sera équivalent à une force égale à OR et à un couple d'axe OG :

1° Il sera équivalent à un couple unique si OR est nul :

$$X = Y = Z = 0;$$

2° Il sera équivalent à une force unique R′, si OR n'étant pas nul,

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 > 0)$$

le moment résultant est perpendiculaire à OR :

$$LX + MY + NZ = 0. \tag{1}$$

La force unique R' est alors précisément le vecteur qui a pour coordonnées X, Y, Z, L, M, N, c'est-à-dire le vecteur qui a pour projections X, Y, Z et pour moments par rapport aux axes L, M, N. En appelant x, y, z les coordonnées d'un point P de la ligne d'action de R', on devra avoir

$$L = yZ - zY,$$
$$M = zX - xZ,$$
$$N = xY - yX;$$

ces trois équations en x, y, z se réduisent à deux en vertu de la relation (1); elles définissent une droite qui est la ligne d'action de la force unique R'.

103. Retour au cas général; axe central. — Imaginons un système de forces quelconques dont la somme géométrique n'est pas nulle. Ce système est équivalent à une force unique OR égale à la somme géométrique des forces appliquée en un point arbitrairement choisi O et à un couple dont l'axe OG est le moment résultant par rapport à ce point.

Si l'on prend un autre point O', le même système est équivalent à une force $O'R'$ égale à OR appliquée au point O' et à un couple d'axe $O'G'$, en général différent de OG.

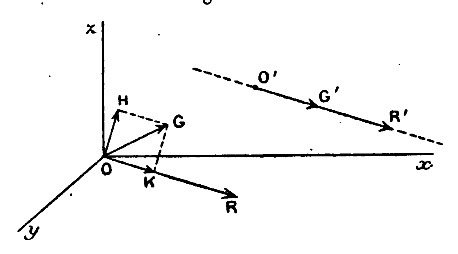
On peut toujours choisir le point O' *de telle façon que la force* $O'R'$ *et l'axe du couple* $O'G'$ *aient même direction; le lieu géométrique des points* O' *possédant cette propriété est une droite parallèle à la somme géométrique des forces appelée* axe central.

En effet, décomposons (*fig.* 101) le couple d'axe OG en deux, l'un dont l'axe OH est normal à OR et l'autre dont l'axe OK est dirigé suivant OR. D'après ce que nous avons vu dans le numéro précédent, l'ensemble de la force OR et du couple d'axe OH normal à OR est équivalent à une force

unique O′R′ égale et parallèle à OR située dans le plan mené par O perpendiculairement à OH.

Dès lors, le système proposé est équivalent à la force O′R′ et au couple d'axe OK parallèle à O′R′. Comme on peut transporter l'axe d'un couple où l'on veut, on peut dire

Fig. 101.



aussi que le système considéré est équivalent à une force O′R′ et à un couple dont l'axe O′G′, égal et parallèle à OK, a la même direction que O′R′.

Nous avons ainsi trouvé un point O′ possédant la propriété demandée : tous les points de la droite indéfinie O′R′ possèdent la même propriété, car on peut toujours transporter R′ en un point de sa ligne d'action. La droite O′R′ est alors l'*axe central*.

Cet axe est unique, car en tout point O en dehors de O′R′ le moment résultant OG est la somme géométrique du moment résultant du couple d'axe O′G′ et du moment linéaire de la force R′ : le moment résultant du couple d'axe O′G′ est un vecteur OK égal et parallèle à O′G′ et, par suite, dirigé suivant OR; le moment linéaire OH de R′ est perpendiculaire à OR; le moment résultant OG, somme de OK et OH a donc une direction différente de OR.

Il peut arriver exceptionnellement que OG soit perpendiculaire à OR; alors le moment OH ou son égal O′G′ est nul et les forces sont équivalentes à une force unique R′; l'axe central est alors la ligne d'action de cette force unique.

Équations de l'axe central. — Soient trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, construisons la somme géométrique OR et le moment résultant OG par rapport à O et soient (X, Y, Z), (L, M, N) les projections respectives de ces deux vecteurs. Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque O′ de l'axe central. La force R′ a pour projections X, Y, Z, et elle est appliquée au point O′; son moment linéaire par rapport à O est un vecteur OH ayant pour projections

$$\text{(OH)} \qquad yZ - zY, \quad zX - xZ, \quad xY - yX;$$

appelons L′, M′, N′ les projections de O′G′ ou de son égal OK sur les axes. Le vecteur OG étant la somme géométrique de OH et OK, on a

$$\begin{aligned} L &= yZ - zY + L', \\ M &= zX - xZ + M', \\ N &= xY - yX + N'; \end{aligned}$$

d'où, inversement,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} L' &= L - yZ + zY, \\ M' &= M - zX + xZ, \\ N' &= N - xY + yX. \end{aligned} \right.$$

Exprimons maintenant que O′G′ a la même direction que O′R′; nous aurons

$$(2) \qquad \frac{L'}{X} = \frac{M'}{Y} = \frac{N'}{Z}$$

ou

$$(3) \qquad \frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z};$$

ces équations où x, y, z sont les coordonnées courantes, définissent l'axe central.

Remarque. — Multiplions les deux termes du premier

des rapports (3) par X, du deuxième par Y, du troisième par Z, puis ajoutons terme à terme; nous verrons que la valeur commune de ces rapports est

$$(4) \qquad \lambda = \frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

les relations (2) donnent alors

$$L' = \lambda X, \qquad M' = \lambda Y, \qquad N' = \lambda Z;$$

le vecteur OG′ aura même sens que le vecteur O′R′ quand la valeur trouvée pour λ sera positive et le sens opposé quand λ sera négative.

Géométriquement, comme on a

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$
$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$
$$\cos \widehat{GOR} = \frac{LX + MY + NZ}{R.G},$$

la quantité λ est

$$\lambda = \frac{G}{R} \cos \widehat{GOR};$$

elle est positive ou négative suivant que $\widehat{GOR}$ est aigu ou obtus.

Dans le cas particulier où, OR étant différent de zéro, l'angle GOR est droit, la quantité λ est nulle; les forces sont alors équivalentes à *une force unique* R′ dirigée suivant l'axe central. Dans ce cas, les rapports (3) ont une valeur nulle et les équations de l'axe central deviennent

$$L - yZ + zY = 0,$$
$$M - zX + xZ = 0,$$
$$N - xY + yX = 0;$$

ce sont bien les équations trouvées plus haut pour la ligne d'action de la force unique R′ (n° 102) équivalente au système.

104. Résumé. — En résumé, on a le Tableau suivant :

$LX + MY + NZ \gtrless 0.$		Système équivalent à deux forces non situées dans un même plan ; équivalent aussi à une force dirigée suivant l'axe central et à un couple dont le plan est perpendiculaire à cet axe.
$LX + MY + NZ = 0.$	1° $X^2 + Y^2 + Z^2 > 0.$	Système équivalent à une force unique dirigée suivant l'axe central.
	2° $X = Y = Z = 0,$ $L^2 + M^2 + N^2 > 0.$	Système équivalent à un couple unique.
	3° $X = Y = Z = 0,$ $L = M = N = 0.$	Système équivalent à zéro. Équilibre.

105. Premier exemple : Forces dans un plan. — Considérons des forces situées toutes dans un même plan xOy; comme nous l'avons vu n° 96, leur somme géométrique OR est dans ce plan et leur moment résultant OG normal au plan. Donc si OR n'est pas nul, les forces sont équivalentes à une force unique située dans le plan.

Si $OR = 0$, elles sont équivalentes à un couple situé dans le plan.

Si $OR = 0$, $OG = 0$, elles se font équilibre.

Analytiquement, on a comme au n° 96

$$Z = 0, \qquad L = 0, \qquad M = 0,$$

et par suite

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Par conséquent

1° Si $X^2 + Y^2 > 0$ le système a une résultante unique dirigée suivant l'axe central

$$z = 0, \qquad N = xY - yX.$$

2° Si $X = Y = 0$ avec $N \gtrless 0$, le système se réduit à un couple.

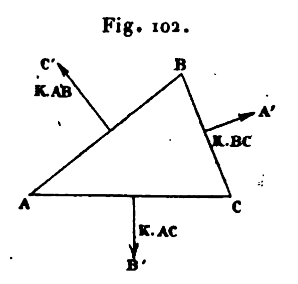
3° Si $X = 0$, $Y = 0$, $N = 0$; le système est en équilibre.

Remarque. — Lorsque N est nul, les forces ont une résultante unique passant par le point O ou se font équilibre; si donc la somme des moments des forces par rapport à deux points du plan est nulle, la résultante passe par ces points, ou bien il y a équilibre; enfin, si cette somme est nulle pour trois points du plan non en ligne droite, il y a nécessairement équilibre.

Exemples. — 1° Prenons dans le plan des xy un polygone quelconque et appliquons au milieu de chacun de ses côtés et perpendiculairement à sa direction une force proportionnelle à sa longueur et dirigée vers l'extérieur du polygone; ces forces se font équilibre. Nous allons établir géométriquement cette proposition. Démontrons-la tout d'abord pour un triangle ABC.

Les trois forces A'(K.BC), B'(K.AC), C'(K.AB) sont concourantes comme étant perpendiculaires aux milieux des côtés du triangle; de plus, la somme de leurs projections sur un axe quelconque est évidemment nulle; ces trois forces se font donc équilibre (*fig.* 102).

Fig. 102.

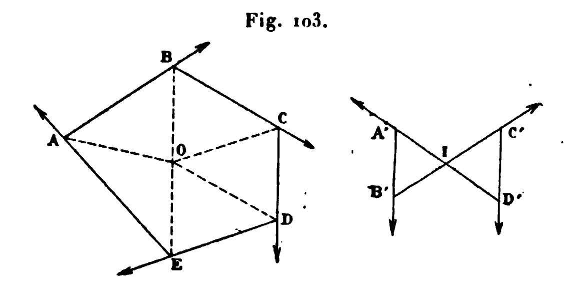


Passons maintenant au cas d'un polygone quelconque. A l'aide de diagonales issues d'un sommet, partageons-le en triangles. Perpendiculairement aux côtés de chacun des triangles ainsi déterminés et en leurs milieux appliquons une série de forces proportionnelles à ces côtés et dirigées vers l'extérieur du triangle correspondant. D'après ce qui vient d'être dit, ce système de forces est en équilibre : or, au milieu de chaque diagonale sont appli-

quées deux forces égales et opposées; on peut donc les supprimer sans troubler l'équilibre, et le polygone reste en équilibre sous l'action des forces appliquées normalement à ses côtés; la proposition est donc démontrée.

2° Soit donné un polygone plan ABCDE (*fig.* 103), sur lequel nous déterminons un sens de circulation; appliquons à chaque sommet de ce polygone une force dirigée dans le

Fig. 103.



sens du côté qui y aboutit et proportionnelle à sa longueur. Si le polygone est convexe, ces forces se réduisent à un couple. En effet, la somme des projections de ces forces sur un axe quelconque est nulle, comme égale à K fois la projection du contour fermé ABCDE. De plus, la somme des moments par rapport à un point quelconque O du plan du polygone n'est pas nulle; en effet, c'est

$$N = \pm 2K[\text{surf. } OAB + \text{surf. } OBC + \ldots],$$

c'est-à-dire

$$N = \pm 2K \,\text{surf.}(ABCDE).$$

Il ne peut donc pas y avoir équilibre.

Si le polygone est concave, il n'en est plus de même; prenons, en effet, le polygone A'B'C'D'; la somme des moments par rapport à un point O du plan sera, en ayant égard à leurs signes,

$$N = \pm 2K(\text{surf. } D'IC' - \text{surf. } B'IA');$$

il y aura donc équilibre si les deux triangles D′IC′, B′IA′ sont équivalents.

106. Forces parallèles. Centre des forces parallèles. — Imaginons un corps solide sollicité par des forces parallèles; convenons de regarder comme positives les intensités des forces qui tirent dans un sens et comme négatives celles des forces qui tirent en sens contraire. Si l'on appelle P_1, P_2, ..., P_n les valeurs algébriques des forces parallèles, ces forces ont une somme géométrique OR qui leur est parallèle et dont la valeur algébrique P est donnée par

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n,$$

ou, sous forme abrégée

$$P = \Sigma P_k.$$

Le moment résultant OG des forces par rapport au point O est perpendiculaire à la direction commune de ces forces, car le moment linéaire de chaque force est perpendiculaire à cette direction. Donc OG est actuellement perpendiculaire sur OR. On a donc les conclusions suivantes :

1° Si $\Sigma P_k \neq 0$, les forces sont équivalentes à une force unique égale à P dirigée suivant l'axe central; la ligne d'action de cette force est le lieu des points pour lesquels le moment résultant est nul.

2° Si $\Sigma P_k = 0$, les forces se réduisent à un couple d'axe OG.

3° Si $\Sigma P_k = 0$, $OG = 0$, les forces se font équilibre; ce cas a été examiné en détail n° 101.

1° **Deux forces parallèles et de même sens.** — Soient d'abord deux forces parallèles et de même sens; leurs intensités P_1 et P_2 pourront être regardées comme positives toutes deux. Ces deux forces sont équivalentes à une force unique P située dans leur plan, ayant même direction et même sens

qu'elles et égale à leur somme

$$P = P_1 + P_2.$$

Il faut déterminer la ligne d'action de cette résultante (*fig.* 104). Pour cela, il suffit de remarquer que, le système étant équivalent à P, le moment résultant du système par rapport à un point quelconque A, pris sur P, doit être égal à celui de P, c'est-à-dire à *zéro*. Le point A doit donc être entre les lignes d'action des deux forces P_1 et P_2, pour que leurs moments linéaires soient de sens contraires; en outre, en abaissant de A les perpendiculaires AA_1 et AA_2 sur les deux forces, on doit avoir

Fig. 104.

$$P_1 . AA_1 = P_2 . AA_2.$$

En menant une transversale quelconque, rencontrant les lignes d'action des trois forces en des points B_1, B_2, B, on aura de même, en valeur absolue,

$$P_1 . BB_1 = P_2 . BB_2,$$

car

$$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{BB_1}{BB_2}.$$

Ainsi la ligne d'action de la résultante P divise une transversale aux deux forces en des segments additifs inversement proportionnels aux composantes.

En donnant des signes aux segments déterminés par les trois points $BB_1 B_2$ sur une transversale, on peut écrire la relation suivante vraie en grandeur et signe

$$\frac{BB_1}{BB_2} = -\frac{P_2}{P_1}.$$

Centre des forces parallèles. — Jusqu'ici nous n'avons fait jouer aucun rôle aux points d'application ni des composantes ni de la résultante : la méthode que nous avons suivie

donne, comme il doit arriver, la même résultante quand on fait glisser les composantes P_1 et P_2 le long de leurs lignes d'action, la résultante pouvant également être transportée le long de sa ligne d'action.

On arrive à la notion du centre des forces parallèles en convenant de prendre des points déterminés, par exemple les points C_1 et C_2 pour points d'application des composantes. Joignons alors $C_1\,C_2$ et appelons C le point où $C_1\,C_2$ coupe la ligne d'action de la résultante; ce point est déterminé par la relation (en grandeur et signe)

$$\frac{CC_1}{CC_2} = -\frac{P_2}{P_1}.$$

Ce point particulier C est le centre des forces parallèles P_1 et P_2 appliquées aux points C_1 et C_2.

Si l'on fait tourner les deux forces parallèles P_1 *et* P_2 *autour des deux points d'application* C_1 *et* C_2 *sans altérer leur rapport, le point* C *reste fixe et la résultante tourne également autour de ce point.*

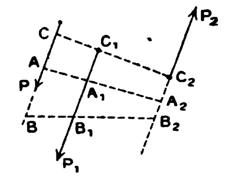
On convient de prendre le point C pour point d'application de la résultante P en transportant cette résultante au point C de sa ligne d'action.

2° **Deux forces parallèles et de sens contraires.** — Prenons (*fig.* 105) comme sens positif le sens de la plus grande P_1; alors P_1 est positif, P_2 négatif. Nous supposons la somme

$$P = P_1 + P_2$$

différente de zéro pour écarter le cas du couple. Alors les deux forces ont une résultante P égale à leur somme géométrique située dans leur plan, dont il faut déterminer la ligne d'action. Cette ligne est le lieu géomé-

Fig. 105.



trique des points A pour lesquels le moment résultant de P_1 et P_2 est nul. Elle est donc extérieure à l'espace situé entre les deux forces, et du côté de la plus grande, de telle façon qu'en abaissant de l'un de ces points des perpendiculaires AA_1 et AA_2 sur les deux forces, on ait pour les deux produits $P_1 . AA_1$ et $P_2 . AA_2$ la même valeur absolue. En menant une transversale quelconque rencontrant les lignes d'action des forces en BB_1B_2 on aura en grandeur et en signe

$$\frac{BB_1}{BB_2} = -\frac{P_2}{P_1}.$$

Centre des forces parallèles. — Ayant choisi deux points déterminés C_1 et C_2 pour points d'application des composantes, le centre des forces parallèles est un point C sur C_1C_2 tel que l'on ait, en grandeur et signe

$$\frac{CC_1}{CC_2} = -\frac{P_2}{P_1}.$$

Quand on fait tourner les composantes autour des points C_1 et C_2 en les laissant parallèles et sans changer leur rapport, le point C reste fixe et la résultante P tourne aussi autour de ce point : nous la supposerons appliquée à ce point.

3° **Deux forces égales et opposées.** — Si l'on a deux forces égales et opposées, elles forment un couple, c'est-à-dire un système qui n'a pas de résultante. En considérant ce cas comme la limite du précédent, $P_1 + P_2$ tendant progressivement vers zéro, on voit que le point C, centre des forces parallèles, *s'éloigne indéfiniment.*

Le même fait a lieu dans le cas plus particulier encore où, les deux forces étant égales et directement opposées, il y a équilibre.

4° **Forces parallèles en nombre quelconque; centre des forces parallèles.** — Prenons maintenant n forces parallèles

ayant pour valeurs algébriques P_1, P_2, ..., P_n et supposons que leur somme géométrique

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = \Sigma P_k$$

soit différente de zéro.

Les forces sont alors équivalentes à une force unique égale à P qu'on peut déterminer comme il suit.

Supposons les composantes appliquées en des points déterminés C_1, C_2, ..., C_n, et imaginons, pour fixer les idées, que les forces P_1, P_2, ..., P_m tirent dans un sens, et les forces P_{m+1}, P_{m+2}, ..., P_n en sens contraire. Nous pourrons, d'après ce qui précède, remplacer P_1 et P_2 par une force unique $Q_1 = P_1 + P_2$ appliquée au centre D_1 des forces parallèles P_1 et P_2; puis nous remplacerons les forces Q_1 et P_3 par une force

$$Q_2 = Q_1 + P_3 = P_1 + P_2 + P_3$$

appliquée au centre D_2 des forces parallèles Q_1 et P_3; et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous ayons remplacé toutes les forces tirant dans un sens par une force unique P' appliquée en un point déterminé C'; de même, nous remplacerons toutes les forces tirant en sens contraire par une force unique P'' appliquée en un point déterminé C''. Ces deux forces se composent enfin en une

$$P = P' + P'' = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$$

appliquée au centre C des forces P' et P'' appliquées en C' et C''.

Ce point final C *est le centre des forces parallèles données.*

Si l'on fait tourner ces forces autour de leurs points d'application en les laissant parallèles, sans altérer leurs rapports mutuels, les forces auxiliaires Q_1, Q_2, .., P', P'' tournent autour de leurs points d'application D_1, D_2, ..., C', C'' sans que

leurs rapports mutuels changent, et, finalement, la résultante tourne autour du point C.

Il suffira donc de déterminer ce point C pour connaître la résultante, puisque sa grandeur, sa direction et son sens sont connus.

Coordonnées du centre des forces parallèles. — Soient n forces parallèles de valeurs algébriques $P_1, P_2, \ldots, P_n$ appliquées aux points $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de coordonnées $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$. Nous venons de voir que le centre des forces parallèles C existe tant que $P_1 + P_2 + \ldots + P_n$ est différent de zéro.

Appelons x_0, y_0, z_0 les coordonnées de ce point.

Le moment de la résultante des forces parallèles par rapport à un axe quelconque est égal à la somme des moments des composantes; comme le centre des forces parallèles est indépendant de la direction commune des forces, je les suppose toutes parallèles à Oz, Oz étant pris comme sens positif des forces. Alors les projections des forces sur les axes sont

$$\begin{array}{lll} X_1 = 0, & Y_1 = 0, & Z_1 = P_1, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\ X_k = 0, & Y_k = 0, & Z_k = P_k, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \end{array}$$

et celles de la résultante

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = P.$$

Écrivons que le moment de P par rapport à Oy est égal à la somme des moments des composantes :

$$z_0 X - x_0 Z = z_1 X_1 - x_1 Z_1 + z_2 X_2 - x_2 Z_2 + \ldots;$$

nous avons, d'après les valeurs particulières ci-dessus,

$$x_0 = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + P_n x_n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n},$$

ou, sous forme abrégée,

$$x_0 = \frac{\Sigma P_k x_k}{\Sigma P_k};$$

de même, on trouve

$$y_0 = \frac{\Sigma P_k y_k}{\Sigma P_k},$$

$$z_0 = \frac{\Sigma P_k z_k}{\Sigma P_k},$$

Remarque. — Le centre des forces parallèles existe tant que,

$$\Sigma P_k$$

est différent de zéro.

Quand $\Sigma P_k = 0$, il est en général rejeté à l'infini.

Cependant, il serait ***indéterminé*** si l'on avait à la fois

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \Sigma P_k = 0, & \Sigma P_k x_k = 0, & \Sigma P_k y_k = 0, \\ & \Sigma P_k z_k = 0. & \end{array} \right.$$

Dans ce cas très particulier, les conditions d'équilibre indiquées au n° 97 sont remplies, quels que soient α, β, γ, c'est-à-dire quelle que soit la direction commune des forces : on dit alors que les forces parallèles sont ***en équilibre astatique.*** On peut vérifier que ce cas se présente quand, ΣP_k étant nul, le centre C′ des forces parallèles tirant dans un sens coïncide avec le centre C″ des forces parallèles tirant en sens contraire. Les résultantes P′ et P″ de ces deux groupes de forces sont alors égales, opposées et ***appliquées au même point.*** Elles se font équilibre, quelle que soit leur direction commune.

Exercice. — On peut, comme exercice, vérifier ces résultats par le calcul. Si, comme au n° 97, on appelle α, β, γ les cosinus directeurs du sens positif des forces, les projections sur les axes de la somme géométrique OR des forces sont

$$X = \alpha P, \qquad Y = \beta P, \qquad Z = \gamma P, \qquad P = \Sigma P_k,$$

et celles du moment résultant OG par rapport à l'origine

$$L = \gamma \Sigma P_k y_k - \beta \Sigma P_k z_k,$$
$$M = \alpha \Sigma P_k z_k - \gamma \Sigma P_k x_k,$$
$$N = \beta \Sigma P_k x_k - \alpha \Sigma P_k y_k.$$

Les forces se réduisent alors à une force unique ou résultante parallèle aux forces données, d'intensité P. La ligne d'action de cette force unique a pour équations

$$L = yZ - zY,$$
$$M = zX - xZ,$$
$$N = xY - yX,$$

où x, y, z sont les coordonnées courantes (n° 102).

Actuellement ces équations deviennent, d'après les valeurs particulières de X, Y, Z, L, M, N,

$$\gamma(Py - \Sigma P_k y_k) - \beta(Pz - \Sigma P_k z_k) = 0, \quad \ldots;$$

on peut les écrire

$$\frac{Px - \Sigma P_k x_k}{\alpha} = \frac{Py - \Sigma P_k y_k}{\beta} = \frac{Pz - \Sigma P_k z_k}{\gamma},$$

ou, en posant $x_0 = \dfrac{\Sigma P_k x_k}{\Sigma P_k}$, $y_0 = \dfrac{\Sigma P_k y_k}{\Sigma P_k}$, $z_0 = \dfrac{\Sigma P_k z_k}{\Sigma P_k}$,

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

Le point ayant pour coordonnées x_0, y_0, z_0 ne dépend pas de α, β, γ, c'est-à-dire de la direction commune des forces; il dépend seulement de leurs points d'application (x_k, y_k, z_k) et des rapports de leurs grandeurs, car les expressions de x_0, y_0, z_0 sont homogènes et de degré zéro par rapport à P_1, P_2, ..., P_n. La résultante unique P passe donc par le point fixe (x_0, y_0, z_0) quels que soient α, β, γ.

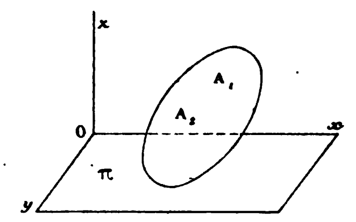
Donc, si, laissant fixes les points d'application, on change la direction commune des forces considérées et si l'on fait

varier ces forces proportionnellement, leur résultante passe par un point fixe de coordonnées (x_0, y_0, z_0). Ce point fixe est le *centre des forces parallèles*.

On choisit ordinairement ce point comme point d'application de la résultante, ce qu'on peut faire en transportant cette résultante au point x_0; y_0, z_0 de sa direction.

Remarque. — Dans le cas particulier où toutes les forces sont dirigées dans le même sens, le centre des forces parallèles est intérieur à toute surface convexe entourant tous les points d'application des composantes. En effet, prenons pour sens positif celui des vecteurs donnés $P_1, \ldots,$

Fig. 106.



P_n, pour plan des xy un plan tangent Π à cette surface, et pour axe Oz une perpendiculaire à ce plan située du même côté que la surface (*fig.* 106). Alors les z de tous les points d'application sont positifs, et l'équation

$$z_0 = \frac{\Sigma P_k z_k}{\Sigma P_k}$$

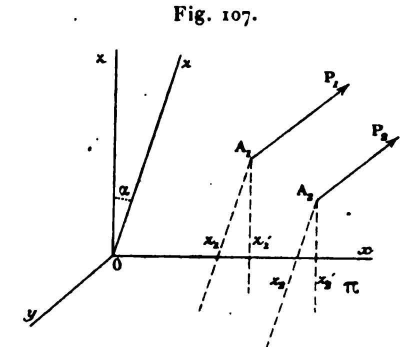
montre que z_0 est également positif. Le centre des forces parallèles se trouvant par rapport à un plan tangent quelconque du même côté que la surface est situé à l'intérieur de celle-ci.

107. Moments des forces parallèles par rapport à un plan. — Un système de forces parallèles, dont la résultante

générale $P = \Sigma P_k$ n'est pas nulle, est équivalent à une force résultante unique P *appliquée au centre* des forces parallèles, d'après la convention faite plus haut. Les formules qui donnent les coordonnées x_0, y_0, z_0 de ce centre conduisent, quand on les traduit en langage géométrique, au théorème *des moments par rapport à un plan.*

Étant donné un plan Π, qu'on peut toujours prendre pour plan xOy, et un axe Oz (*fig.* 107) de direction arbitraire, on

Fig. 107.



appelle *moment d'une des forces parallèles, par rapport à ce plan* Π, *le produit de la valeur algébrique* P_k *de la force, par la coordonnée* z_k *de son point d'application* $P_k z_k$.

Le moment ainsi défini est une quantité positive, négative ou nulle, dont la valeur dépend du point d'application de la force, de sorte que ce moment change quand on la transporte en un point de sa direction. La propriété fondamentale résultant de cette définition est la suivante :

Le moment par rapport à un plan de la résultante de plusieurs forces parallèles est égal à la somme algébrique des moments des composantes à condition de prendre, pour point d'application de la résultante, le centre des forces parallèles.

Pour le démontrer, supposons d'abord l'axe Oz perpendiculaire au plan Π; le z du centre des forces parallèles est donné par l'équation

$$Pz_0 = \Sigma P_k z_k,$$

où $P = \Sigma P_k$; or cette équation exprime précisément le théorème que nous voulons démontrer.

Si l'axe Oz est oblique au plan Π, on prendra un axe auxiliaire Oz' normal au plan et faisant avec Oz un angle α. Appelons $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n, z'_0$ les coordonnées z des points d'application comptées parallèlement à ce nouvel axe, c'est-à-dire normalement au plan; on aura, d'après ce qui précède,

$$Pz'_0 = \Sigma P_k z'_k;$$

mais les coordonnées z' et z sont liées par les relations évidentes

$$z'_1 = z_1 \cos\alpha, \quad z'_2 = z_2 \cos\alpha, \quad \ldots, \quad z'_0 = z_0 \cos\alpha;$$

en substituant, on a la relation à démontrer

$$Pz_0 = \Sigma P_k z_k.$$

Le théorème des moments est donc établi dans sa généralité.

En l'appliquant successivement aux trois plans coordonnés supposés obliques, on obtient, pour déterminer les coordonnées x_0, y_0, z_0, du centre des forces parallèles *en axes obliques*, les mêmes formules qu'*avec des axes rectangulaires*.

Remarque. — Le théorème des moments des forces parallèles par rapport à un plan ne peut s'appliquer que si $\Sigma P_k \gtrless 0$.

Lorsque $\Sigma P_k = 0$, les forces sont équivalentes à un couple ou à zéro. Même *dans ce dernier cas*, le théorème ne peut pas s'appliquer, car si la résultante est alors nulle, le centre des forces parallèles est à l'infini. Il n'y a d'exception que pour le cas encore plus particulier où les forces étant équiva-

lentes à zéro sont en équilibre astatique; alors x_0, y_0, z_0 *sont indéterminés.*

108. Centres de gravité. — Nous avons déjà défini le *poids* d'un point matériel : c'est une force verticale dont l'intensité p est égale à la masse du point matériel multipliée par l'accélération g due à la pesanteur, accélération qui, en un même lieu, est la même pour tous les points pesants. La direction de la verticale change d'un lieu à l'autre; l'observation a prouvé que la valeur de g varie avec la latitude et l'altitude; mais ces variations sont insensibles dans l'étendue d'un corps de dimensions ordinaires. Un corps solide pesant peut donc être considéré comme une réunion d'un grand nombre de points matériels liés entre eux et sollicités par des forces verticales parallèles proportionnelles à leurs masses. La résultante de ces forces, qui est égale à leur somme, s'appelle le *poids du corps*. Le centre de ces forces parallèles se nomme spécialement *centre de gravité;* il occupe dans le corps une position indépendante de l'orientation de celui-ci; car, lorsque le corps se déplace, tout se passe, pour un observateur entraîné avec lui, comme si, le corps restant immobile, les forces parallèles tournaient d'un même angle autour de leurs points d'application, ce qui n'altère pas la position du centre des forces parallèles. Ainsi, *le centre de gravité est le point du corps par lequel passe constamment le poids du corps, quelle que soit son orientation.* Si donc on fixait le centre de gravité en laissant au corps solide la liberté de tourner autour de ce point, le corps, soumis uniquement à l'action de la pesanteur, resterait en équilibre dans toutes les positions qu'il peut prendre.

109. Expressions des coordonnées du centre de gravité. — Soient $m_1, m_2, \ldots, m_n$ les masses, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les poids des points matériels qui constituent un corps solide

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$ leurs coordonnées, P et M le poids et la masse du corps. On aura

$$p_k = m_k g, \qquad P = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = Mg.$$

Si l'on désigne par (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du centre de gravité, on a, d'après les formules qui donnent le centre des forces parallèles,

$$x_0 = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

ou, sous forme abrégée,

$$x_0 = \frac{\Sigma p x}{\Sigma p} = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad y_0 = \frac{\Sigma p y}{\Sigma p} = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}, \quad z_0 = \frac{\Sigma p z}{\Sigma p} = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}.$$

On voit, d'après ces formules, que la position du centre de gravité dépend uniquement des *masses* des points.

Cette observation est importante, car elle permet d'étendre la notion de centre de gravité à des systèmes non pesants. Même, dans certaines questions relatives à des points matériels de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *non invariablement* liés entre eux, il est utile d'introduire le point dont les coordonnées x_0, y_0, z_0 sont définies par les formules précédentes : ce point qu'Euler proposait d'appeler *centre d'inertie* continue à porter le nom de *centre de gravité,* quoique les considérations qui conduisent à la notion du centre de gravité ne soient plus applicables. Le centre de gravité est évidemment situé à l'intérieur de toute surface convexe entourant les points considérés (p. 209, *Remarque*).

Lorsque l'on connaît les centres de gravité G_1 et G_2 de deux parties d'un corps et leurs masses M_1 et M_2, on en déduit immédiatement le centre de gravité du corps, car ce centre est le centre des forces parallèles $M_1 g$ et $M_2 g$ appliquées aux deux points G_1 et G_2. D'une manière générale, lorsque l'on connaît les centres de gravité $G_1, G_2, \ldots, G_p$

de plusieurs parties d'un corps et leurs masses, M_1, M_2, ..., M_p, le centre de gravité du corps est le centre des forces parallèles $M_1 g$, $M_2 g$, ..., $M_p g$ appliquées aux points G_1, G_2, ..., G_p. En appelant $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_p, y_p, z_p$ les coordonnées des centres de gravité de ces diverses parties, on aura pour les coordonnées x_0, y_0, z_0 du centre de gravité du corps

$$x_0 = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots + M_p x_p}{M_1 + M_2 + \ldots + M_p}, \qquad y_0 = \frac{\Sigma M y}{\Sigma M}, \qquad z_0 = \frac{\Sigma M z}{\Sigma M}.$$

Quand on veut déterminer le centre de gravité d'un corps solide de forme donnée, par exemple d'une masse de métal, on doit appliquer les formules précédentes à un corps formé d'un nombre extrêmement grand de points matériels situés à des distances mutuelles extrêmement petites. On tourne la difficulté en regardant le corps comme continu, ce qui n'est pas conforme à la réalité, mais fournit une approximation très suffisante pour les applications. On supposera le corps divisé en parties infiniment petites, en petits cubes par exemple, et l'on appliquera les formules précédentes.

Lorsqu'un corps a une épaisseur très petite par rapport à ses autres dimensions, on assimile le corps à une surface : telle est, par exemple, une feuille de papier ou de métal très mince. De même, il est des cas où l'on peut considérer un corps comme réduit *à une ligne :* tel est le cas d'un fil long et fin.

110. Théorèmes relatifs aux centres de gravité.

1° *Lorsqu'une figure admet un centre de symétrie, son centre de gravité se confond avec le centre de symétrie.*

En effet, la figure tout entière peut être partagée en éléments matériels très petits deux à deux symétriques et de même masse; la droite qui joint deux d'entre eux passe par le centre de symétrie qui est son milieu; par conséquent la

résultante des forces égales et parallèles appliquées aux extrémités de cette droite passe aussi par son milieu; comme il en est de même de toutes les résultantes semblablement obtenues, la résultante totale passe par le centre de symétrie.

2° *Lorsqu'une figure plane admet un axe de symétrie ou un diamètre, son centre de gravité est sur cet axe ou sur ce diamètre.* Si la figure admet un axe de symétrie, à tout point A correspond un point B symétrique tel que le milieu O de AB soit sur l'axe; c'est donc en ce point O qu'est appliquée la résultante des deux forces égales appliquées en A et en B; il en est de même de toutes les résultantes obtenues de la même façon, c'est-à-dire qu'elles sont toutes appliquées en des points de l'axe de symétrie. Il reste à composer toutes ces résultantes partielles dont les points d'application sont sur l'axe, donc le point G est aussi sur l'axe.

Fig. 108.

Dire que la figure admet un *diamètre* c'est dire qu'il existe une droite qui coupe toutes les cordes parallèles à une direction déterminée en deux parties égales (*fig.* 108). Les centres de gravité de toutes ces cordes se trouveront donc sur cet axe de *symétrie oblique* qu'on nomme leur *diamètre conjugué* et, par suite, le centre de gravité de la figure s'y trouvera aussi.

3° *Lorsqu'une figure dans l'espace admet un plan de symétrie ou un plan diamétral, son centre de gravité est dans ce plan.* Le raisonnement est le même : si la figure admet un plan de symétrie, à tout point A correspond un point B symétrique tel que le milieu O de la droite AB se trouve dans le plan de symétrie; c'est donc en ce point O qu'est appliquée la résultante des deux forces égales appliquées en A et en B; il en est de même de toutes les résultantes obtenues de la même façon : leur point d'application est dans

le plan et par suite le centre de gravité, point d'application de la résultante de ces résultantes partielles, est aussi dans ce plan de symétrie.

Dire que la figure admet un *plan diamétral*, c'est dire qu'il existe un plan qui coupe toutes les cordes parallèles à une direction déterminée en deux parties égales. Les centres de gravité de toutes ces cordes se trouveront donc dans ce plan de *symétrie oblique* qu'on appelle leur *plan diamétral conjugué*, et par suite le centre de gravité de la figure s'y trouve aussi.

111. Centre de gravité des lignes planes.

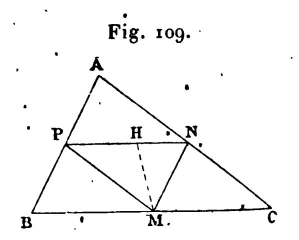
Nous considérons exclusivement des lignes *homogènes*. Une ligne matérielle est dite *homogène* quand la masse d'une portion quelconque de cette ligne est proportionnelle à sa longueur.

Segment de droite. — Le centre de gravité d'un segment de droite est en son milieu qui est un centre de symétrie.

Circonférence de cercle. — Le centre de gravité d'une circonférence est en son centre.

Contour d'un triangle. — Chaque côté a un poids proportionnel à sa longueur et appliqué en son milieu; aux points N et P, milieux de AC et AB en particulier, sont donc appliquées des forces parallèles, de même sens, respectivement proportionnelles à AC et à AB (*fig.* 109).

Fig. 109.



Soit H le point d'application de la résultante de ces deux forces, on doit avoir

$$\frac{HN}{HP} = \frac{AB}{AC},$$

et comme MN et MP sont les moitiés de AB et de AC, on a

$$\frac{HN}{HP} = \frac{MN}{MP},$$

ce qui montre que le point H est le pied de la bissectrice intérieure du triangle MNP; le centre de gravité cherché est donc sur la bissectrice MH; il est de même sur les deux autres bissectrices du même triangle et, par suite, à leur point de rencontre, c'est-à-dire au centre du cercle inscrit dans le triangle MNP, formé en joignant les milieux des côtés du triangle ABC.

112. Centre de gravité des aires planes.

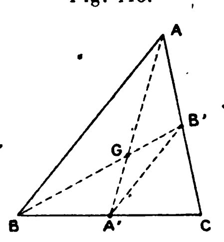
Nous considérerons exclusivement des aires *homogènes*, c'est-à-dire telles que la masse d'une portion quelconque de l'aire soit proportionnelle à son étendue.

Cercle. — Le centre de gravité d'un cercle est en son centre, qui est un centre de symétrie.

Parallélogramme. — Le centre de gravité d'un parallélogramme est en son centre, qui est un centre de symétrie.

Triangle. — Chaque médiane est un diamètre conjugué par rapport aux cordes parallèles au côté correspondant. Cha-

Fig. 110.



cune d'elles, AA' par exemple (*fig.* 110), divise, en effet, en deux parties égales toutes les cordes parallèles à BC. Le centre

de gravité de l'aire du triangle se trouve donc au point de rencontre des médianes; joignons A'B', cette droite est parallèle à AB et égale à sa moitié; la considération des triangles semblables ABG, A'B'G montre donc que l'on a

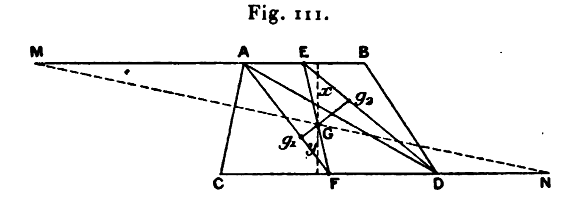
$$\frac{AG}{A'G} = \frac{AB}{A'B'} = 2.$$

Le centre de gravité est donc aux $\frac{2}{3}$ de la médiane à partir du sommet.

On montrera à titre d'exercice que le poids total P d'un triangle est la résultante de trois poids égaux à $\frac{1}{3}$P appliqués aux trois sommets.

Trapèze. — Soit ABCD un trapèze (*fig.* 111); son centre

Fig. 111.



de gravité se trouve sur la droite EF qui joint les milieux de ses bases parallèles, cette droite étant un diamètre pour les droites parallèles aux bases AB et CD.

Traçons la diagonale AD, les deux triangles ACD et ABD ont leurs centres de gravité en g_1 et g_2 sur les médianes AF et DE. Le centre de gravité G est donc au point de rencontre des droites $g_1 g_2$ et EF. Aux points g_1 et g_2 sont appliquées des forces proportionnelles aux aires des triangles ACD et ABD, et par suite à leurs bases CD et AB, puisqu'ils ont même hauteur.

Le point G est donc déterminé sur la droite $g_1 g_2$ par le rapport

$$\frac{g_1 G}{g_2 G} = \frac{AB}{CD}.$$

Désignons par x et y les distances de G à AB et à CD et leur somme $x+y$ par h et appliquons le théorème des moments par rapport à deux plans passant par AB et par CD et perpendiculaires au plan du trapèze; on a, en appelant b et B les bases,

$$(B+b)x = 2B\frac{h}{3} + b\frac{h}{3}.$$

$$(B+b)y = B\frac{h}{3} + 2b\frac{h}{3}.$$

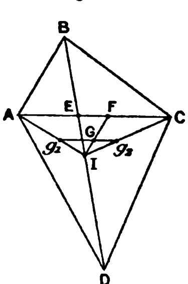
d'où

$$\frac{x}{y} = \frac{2B+b}{B+2b} = \frac{B+\frac{b}{2}}{\frac{B}{2}+b}.$$

Ce qui montre que, si l'on porte à gauche de A une longueur AM = B et à droite de D une longueur DN = b, la droite MN passe par le point G.

Quadrilatère. — Soit ABCD un quadrilatère (*fig.* 112); la diagonale BD détermine deux triangles dont les centres de gravité g_1, g_2 sont sur les médianes AI et CI aux $\frac{2}{3}$ à partir des sommets. Les poids appliqués en g_1 et g_2 sont proportionnels aux aires de ces triangles et, comme ils ont même base, ces poids sont proportionnels à AE et CE. Le centre de gravité G est défini par le rapport

Fig. 112.



$$\frac{g_1G}{g_2G} = \frac{CE}{AE}.$$

Il suffit donc de prendre CF = AE et de joindre IF pour avoir le point G. Il suffit même de remarquer que G est au tiers de IF pour avoir une construction plus simple.

Polygone. — Il faut décomposer le polygone en triangles,

appliquer au centre de gravité de chaque triangle une force de direction constante proportionnelle à l'aire du triangle et chercher le centre de ces forces parallèles.

113. Centre de gravité des volumes.

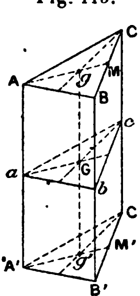
Nous considérerons encore des volumes *homogènes,* c'est-à-dire tels que la masse d'une portion quelconque du volume soit proportionnelle à son étendue.

Parallélépipède. — Le centre de gravité est au centre du parallélépipède qui est un centre de symétrie.

Sphère. — Le centre de gravité est au centre de la sphère.

Prisme triangulaire. — Le prisme triangulaire a quatre plans diamétraux, à l'intersection desquels se trouve son centre de gravité : 1° le plan de la *section moyenne* passant par les milieux a, b, c des arêtes, qui est un plan diamétral pour toute droite parallèle aux arêtes; 2° les trois plans qui passent par une arête et par la médiane correspondante du triangle de base; AA'MM' est l'un d'eux (*fig.* 113), il est plan diamétral pour toutes les droites parallèles à BC.

Fig. 113.



Le centre de gravité G est donc sur l'intersection de deux de ces plans, c'est-à-dire sur la ligne gg' qui joint les centres de gravité des bases; comme il est dans le plan abc, on voit que : le centre de gravité d'un prisme triangulaire est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases; il coïncide avec le centre de gravité de la section moyenne.

Prisme polygonal. — On décompose le prisme en prismes triangulaires au moyen de plans menés par ses arêtes latérales;

les centres de gravité de ces prismes coïncident avec les centres de gravité des triangles en lesquels est décomposée la section moyenne et, par conséquent, le centre de gravité du prisme polygonal coïncide avec le centre de gravité de sa section médiane.

Tétraèdre. — Tout plan qui passe par une arête et le milieu de l'arête opposée est un plan diamétral relativement aux cordes parallèles à cette dernière arête et renferme le centre de gravité; le tétraèdre comporte autant de plans diamétraux de cette espèce que d'arêtes, c'est-à-dire six.

Soient ABE et ADF deux de ces plans; ils se coupent suivant la droite A*g*, *g* étant le centre de gravité de la face BDC. Dans le troisième plan BCH, la droite FH coupe A*g* au centre de gravité G (*fig.* 114).

Menons H*h* parallèle à G*g*; *h* est le milieu de *g*D; les points *h* et *g* partagent donc la droite FD en trois parties égales. Il en résulte que G*g* est la moitié de H*h*, qui est lui-même la moitié de A*g*; donc le centre de gravité d'un tétraèdre est situé au quart, à partir d'une face, de la droite qui joint le centre de gravité de cette face au sommet opposé.

Fig. 114.

Le point G étant le milieu de FH, le centre de gravité d'un tétraèdre est au milieu de l'une des droites qui joint les milieux de deux arêtes opposées.

Il résulte encore du premier énoncé que le centre de gravité du tétraèdre coïncide avec le centre de gravité du triangle, suivant lequel il est coupé par un plan mené parallèlement à une face et à une distance égale au quart de la hauteur correspondant à cette face prise pour base.

Enfin on peut remarquer que le poids P d'un tétraèdre est la somme de quatre poids égaux à $\frac{1}{4}$P appliqués aux quatre sommets.

Pyramide. — On décompose la pyramide en tétraèdres au moyen de plans menés par ses arêtes latérales; le centre de gravité de la pyramide coïncide avec celui du polygone suivant lequel elle est coupée par un plan mené parallèlement à sa base et à une distance égale au quart de la hauteur de la pyramide; le centre de gravité est donc au quart, à partir de la base, de la droite qui joint le sommet au centre de gravité du polygone de base.

E. — ÉQUILIBRE DES CORPS NON LIBRES. MACHINES SIMPLES.

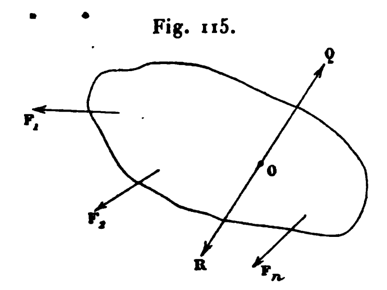
114. Méthode. — La méthode générale que nous emploierons consiste à regarder les corps comme libres, en introduisant comme inconnues auxiliaires les réactions provenant des liaisons qui leur sont imposées, réactions que l'on nomme *forces de liaison*.

115. Corps ayant un point fixe. — Imaginons un solide ayant un point O fixe, autour duquel il peut tourner librement. Désignons par $F_1, F_2, \ldots, F_n$ les forces qui agissent sur ce solide. Un tel corps est ce qu'on peut appeler *levier* dans le sens le plus général du mot. Nous cherchons donc les conditions d'équilibre d'un levier.

Le corps solide exerce sur le point fixe une pression R (*fig.* 115); en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, le point fixe exerce sur le corps une réaction Q égale et directement opposée à R, de sorte que le corps solide peut être considéré comme libre sous l'action des forces F_1, $F_2, \ldots, F_n$, Q. Si le corps est en équilibre, c'est que les n premières forces ont une résultante unique, égale et directement opposée à Q; la condition d'équilibre est donc que les forces données aient une résultante unique passant par le

point fixe. Cette condition est suffisante, car, si l'on remplace les forces appliquées au corps par cette résultante, celle-ci est détruite par la résistance du point fixe qui développe une réaction égale et directement opposée. Dans ce raisonnement

Fig. 115.



on admet que la résultante ne dépasse pas en grandeur la limite de la résistance du corps dont le point fixe fait partie.

Nous pouvons retrouver analytiquement ces résultats; prenons des axes rectangulaires passant par le point O; désignons par X, Y, Z, L, M, N, les projections de la somme géométrique et du moment résultant par rapport à l'origine des forces F appliquées au corps solide, et par X', Y', Z' les projections de la réaction Q du point fixe; les conditions d'équilibre seront

$$(1) \qquad X + X' = 0, \qquad Y + Y' = 0, \qquad Z + Z' = 0,$$

$$(2) \qquad L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0,$$

car les moments de Q par rapport aux axes sont nuls. Les équations (2), ne contenant pas la réaction, sont les conditions nécessaires de l'équilibre; elles expriment d'ailleurs que les forces F appliquées au corps se réduisent à une force unique passant par l'origine. Les équations (1) montrent alors que la réaction (X', Y', Z') est égale et opposée à cette résultante (X, Y, Z), qui n'est donc autre que la *pression* sur le point fixe.

Prenons le cas particulier d'un levier soumis à deux forces

seulement F_1, F_2; pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que ces forces soient tenues en équilibre par la réaction du point O. Les forces F_1, F_2, et cette réaction devant se faire équilibre, il faut que F_1, F_2 soient dans un même plan avec O et que la somme des moments des forces F_1, F_2 par rapport à O soit nulle; c'est la condition élémentaire de l'équilibre du levier que nous étudions plus loin.

116. Corps ayant un axe fixe. — Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ les forces qui agissent sur un corps solide mobile autour d'un axe fixe Oz; celui-ci exercera sur les divers points de l'axe des pressions P', P'', P''' ..., et l'axe exercera à son tour des réactions Q', Q'', Q''', ... Le corps pourra être considéré comme libre, sous l'action des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n, Q'$, Q'', ... Pour qu'il y ait équilibre, il faut, en particulier, que la somme des moments de toutes ces forces, par rapport à l'axe fixe, soit nulle. Et comme les moments des réactions Q', Q'', ... sont nuls, il faut que l'on ait

$$N = 0.$$

C'est une condition nécessaire de l'équilibre. Elle est suffisante; en effet, si elle est remplie, les forces se réduisent à une résultante OR, qui est détruite par la résistance de l'axe et à un couple dont l'axe OG est perpendiculaire à Oz, puisque N est nul. On peut faire tourner ce couple dans son plan, de façon que son bras de levier coïncide avec l'axe; alors les forces $\varphi\varphi'$ qui le constituent, étant appliquées en des points de l'axe, sont détruites par sa résistance; le corps est donc bien en équilibre. Nous examinerons en détail, à propos du treuil, le cas où le corps est sollicité par deux forces.

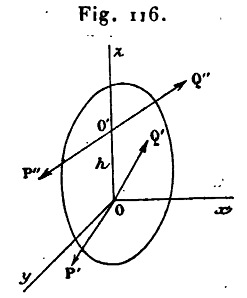
Calculons maintenant les réactions de l'axe. On peut toujours admettre que la fixité de l'axe a été obtenue en fixant deux de ses points, O, O'. Ces points exerceront sur le

solide des réactions Q′, Q″. Prenons le point O pour origine. Désignons par X, Y, Z, L, M, N les mêmes éléments que précédemment, et par X′, Y′, Z′, X″, Y″, Z″ les projections des réactions Q′, Q″. Soit h la distance OO′. Nous aurons les conditions d'équilibre (*fig.* 116)

$$X + X' + X'' = 0, \qquad Y + Y' + Y'' = 0, \qquad Z + Z' + Z'' = 0;$$
$$L - hY'' = 0, \qquad M + hX'' = 0, \qquad N = 0.$$

La dernière de ces équations est indépendante des réactions : c'est la condition nécessaire et suffisante de l'équi-

Fig. 116.



libre. Les deux équations précédentes donnent X″ et Y″. Portant alors dans les deux premières, on calcule X′ et Y′; mais Z′ et Z″ ne sont assujetties qu'à la condition unique

$$Z + Z' + Z'' = 0.$$

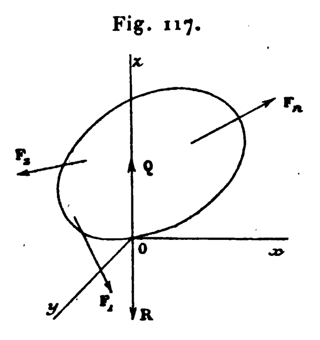
et il est impossible de calculer complètement les réactions par les considérations développées précédemment.

Au point de vue physique, les réactions de l'axe sont cependant bien déterminées; mais les solides naturels ne possèdent pas les propriétés que l'on suppose aux corps solides en Mécanique rationnelle : ils sont déformables et leur déformation met en jeu des forces élastiques; en tenant compte de ces forces, on peut calculer approximativement les réactions.

117. Corps s'appuyant sur un plan fixe.

1° **Cas d'un seul point d'appui.** — Considérons d'abord le cos où le corps ne s'appuie que par un point sur le plan fixe; le plan exerce sur le corps une réaction normale, si nous supposons que le corps peut glisser sans frottement. Le corps peut être considéré comme libre, mais soumis aux forces F_1, F_2, ..., F_n, qui agissent directement sur lui, et à cette réaction Q. Pour que le corps soit en équilibre, il faut que les forces F aient une résultante unique égale et directement opposée à Q (*fig.* 117), c'est-à-dire que les forces données

Fig. 117.



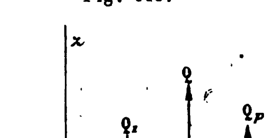
aient une résultante passant par le point d'appui, normale au plan et dirigée de façon à appliquer le corps sur le plan. Ces conditions sont évidemment suffisantes, car, lorsqu'elles sont remplies, la résultante ne peut déterminer aucun glissement et est détruite par la fixité du plan qui développe une réaction égale et opposée à Q. Il serait aisé de retrouver analytiquement ces résultats.

2° **Cas de plusieurs points d'appui en ligne droite.** — Admettons que le corps s'appuie sur le plan fixe xOy par des points A_1, A_2, ..., A_p de la droite Ox. En tous ces points, le plan exerce des réactions normales Q_1, Q_2, ..., Q_p, toutes dirigées dans le même sens (*fig.* 118). Ces forces ont une

résultante Q normale au plan, dirigée dans le même sens, et dont le point d'application tombe sur Ox entre les points extrêmes A_1, A_p.

Pour que l'équilibre ait lieu, il faut que les forces données fassent équilibre aux réactions du plan, c'est-à-dire qu'elles aient une résultante unique, normale au plan, dirigée de façon à appliquer le corps sur le plan, et dont le prolonge-

Fig. 118.



ment rencontre Ox en un point situé entre A_1 et A_p. Ces conditions nécessaires sont suffisantes, car cette résultante peut alors être décomposée en deux autres, normales au plan et appliquées en deux points d'appui; ces forces seront détruites par la résistance du plan.

Pour exprimer analytiquement ces conditions, nous prendrons pour axe des x la droite Ox, l'axe des z normal au plan et situé du même côté que le corps par rapport à ce plan. Toutes les réactions Q_1, Q_2, ..., Q_p sont alors positives ou nulles. Les équations d'équilibre sont

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_p = 0;$$
$$L = 0, \qquad M - a_1 Q_1 - a_2 Q_2 \ldots - a_p Q_p = 0, \qquad N = 0,$$

en désignant par a_1, a_2, ..., a_p les abscisses des points d'appui. Quatre de ces équations $X = 0$, $Y = 0$, $L = 0$, $N = 0$, qui sont indépendantes des réactions, expriment des conditions nécessaires d'équilibre; elles montrent que les forces données doivent avoir une résultante unique normale

au plan des xy et rencontrant l'axe des x. La troisième équation nous montre que Z doit être négatif, c'est-à-dire que la résultante doit être dirigée de façon à appliquer le corps sur le plan. Soit x l'abscisse du point où la résultante rencontre Ox. Son moment par rapport à Oy sera $M = -xZ$; on devra donc avoir

$$xZ + a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \ldots + a_p Q_p = 0,$$

d'où l'on tire, en remplaçant Z par sa valeur,

$$x = \frac{a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \ldots + a_p Q_p}{Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_p},$$

et cette quantité est, comme on sait, comprise entre les deux valeurs extrêmes a_1 et a_p, car les quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ sont positives; le prolongement de la résultante rencontre donc Ox entre les points d'appui extrêmes.

Les réactions du plan doivent maintenant vérifier les deux équations

$$\begin{aligned} Z + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_p &= 0. \\ M - a_1 Q_1 - a_2 Q_2 - \ldots - a_p Q_p &= 0. \end{aligned}$$

S'il n'y a que deux points d'appui, elles donnent les deux réactions. S'il y a plus de deux points d'appui, les réactions ne sont pas déterminées par ces deux relations. On les déterminerait en introduisant des considérations d'élasticité.

3° **Cas général.** — Supposons que le corps solide repose sur le plan fixe par une série de points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ non en ligne droite. Le plan exerce des réactions normales Q_1, $Q_2, \ldots, Q_p$, qui ont une résultante unique Q, car elles sont toutes dirigées dans le même sens et, d'après ce que l'on a vu sur la composition des forces parallèles, le point où cette résultante perce le plan est situé à l'intérieur de tout polygone convexe qui renferme tous les points d'appui; en particulier, il est à l'intérieur du polygone de *sustentation,*

polygone convexe dont les sommets sont des points d'appui et qui renferme tous les autres points d'appui dans son intérieur. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que les forces données fassent équilibre à la résultante Q ; il faut donc que les forces F aient une résultante unique normale au plan, dirigée de façon à appliquer le corps sur le plan et qui le traverse à l'intérieur du polygone de sustentation. Ces conditions sont suffisantes, car, dans ces hypothèses, on pourra toujours décomposer cette résultante en trois forces normales au plan et appliquées à trois des points d'appui, forces qui seront détruites par la résistance du plan.

Prenons, comme plus haut, le plan fixe pour plan des xy; le corps pouvant être considéré comme libre, mais soumis à l'action des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$, les conditions d'équilibre seront, en désignant par a_1, b_1, a_2, b_2, ... les coordonnées des points d'appui,

$$(1) \qquad X = 0, \qquad Y = 0, \qquad N = 0;$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Z + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_p = 0, \\ L + b_1 Q_1 + b_2 Q_2 + \ldots + b_p Q_p = 0. \\ M - a_1 Q_1 - a_2 Q_2 - \ldots - a_p Q_p = 0. \end{array} \right.$$

Les équations (1), étant indépendantes des réactions, expriment une condition nécessaire d'équilibre : c'est que les forces données aient une résultante unique normale au plan ; en effet, la quantité $LX + MY + NZ$ est nulle, et l'on ne ne peut avoir $Z = 0$, sans quoi toutes les réactions seraient nulles, puisqu'elles ne peuvent être que positives ou nulles. Dans ce cas particulier, où toutes les réactions seraient nulles, Z, L et M seraient nuls, il y aurait équilibre entre les forces directement appliquées. En écartant ce cas d'équilibre évident, on voit que les forces $F_1, \ldots, F_n$ doivent avoir une résultante normale au plan ; il faut, en outre, que Z soit négatif, comme il résulte de la première des équations (2), et que la résultante unique perce le plan des xy à l'intérieur du

polygone de sustentation, condition que l'on déduirait des deux dernières équations (2). S'il n'y a que trois points d'appui, non en ligne droite, les équations (2) permettent de déterminer les trois réactions. S'il y en a plus, il faut tenir compte de l'élasticité des corps.

118. Machines simples. — Les machines simples sont constituées par un corps solide non libre, ayant un point fixe ou un axe fixe. Ces machines sont destinées à transformer l'action des forces; elles servent à équilibrer, au moyen de forces nommées *puissances,* d'autres forces nommées *résistances.*

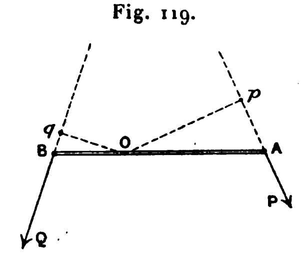
Le premier type de machine simple est le levier formé par un corps solide mobile autour d'un point fixe.

Le second type de machine simple est le treuil constitué par un solide qui tourne autour d'un axe fixe.

Les balances, les poulies et les moufles sont des machines constituées par des solides articulés les uns aux autres par des points ou des axes. Quoique ce ne soient plus à proprement parler des machines simples, nous donnerons leur théorie qui découle immédiatement de celle des deux machines simples.

119. Levier. — Soit une barre AB ayant un point fixe O (*fig.* 119); en B est appliquée une résistance Q et

Fig. 119.



en A une puissance P; négligeons le poids de la barre et cherchons la condition pour que ces deux forces se fassent équi-

libre; il faut et il suffit qu'elles aient une résultante unique et qui passe par le point fixe; pour cela il faut et il suffit :

1° Que la puissance et la résistance soient dans un même plan contenant le point d'appui.

2° Que la somme des moments des composantes par rapport au point fixe soit nulle, ce qui donne l'égalité

$$P \times Op = Q \times Oq.$$

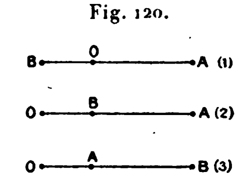
Op et Oq sont les *bras du levier;* la puissance et la résistance doivent être inversement proportionnelles aux bras du levier.

Il existe trois genres de leviers :

Premier genre. — Le point d'appui O (*fig.* 120[1]) est compris entre les points A et B d'application de la puissance et de la résistance; la pince des tailleurs de pierre, le gouvernail des bateaux en sont des exemples; les ciseaux sont des leviers doubles du premier genre, ainsi que les tenailles.

Deuxième genre. — Le point d'application B de la résistance est placé entre le point d'appui O et le point d'application A de la puissance (*fig.* 120[2]); la brouette est le type de ce genre de levier.

Fig. 120.



Troisième genre. — Le point d'application A de la puissance est placé entre le point d'appui O et le point d'application B de la résistance; c'est le cas de la pédale du rémou-

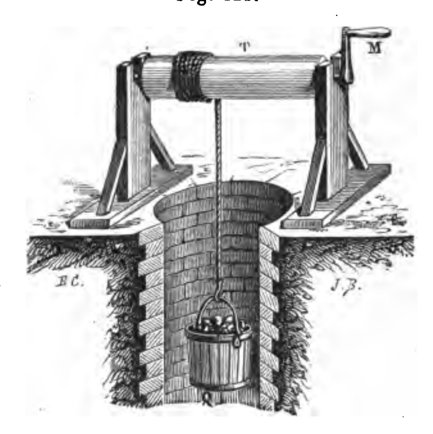
leur (*fig.* 120^3); les pincettes sont formées d'un levier double de troisième genre.

Dans les deux premiers genres, la résistance est dans la pratique plus grande que la puissance; dans le troisième elle est toujours plus petite.

Dans la pratique, le point fixe est remplacé par une petite surface ou par un axe fixe; la théorie se rapproche alors de celle du treuil et les conditions d'équilibre se simplifient; il n'est, en effet, alors pas nécessaire que la puissance et la résistance soient exactement dans un même plan avec le point d'appui; il suffit de passer en revue les divers exemples qu'on donne le plus souvent des leviers des trois genres pour reconnaître l'exactitude de cette remarque.

120. Treuil. — Quand un solide mobile autour d'un axe fixe est sollicité par deux forces, il faut et il suffit, pour qu'il

Fig. 121.



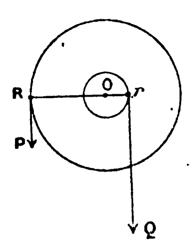
y ait équilibre, que la somme algébrique des moments des deux forces par rapport à l'axe soit nulle : il suffit donc de projeter les deux forces sur un plan perpendiculaire à l'axe

et d'écrire que la somme des moments des deux projections par rapport au pied de l'axe est nulle. Le treuil est un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe, permettant de transformer un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne.

Il se compose d'un cylindre en bois ou en métal, l'*arbre du treuil* (*fig.* 121), terminé à ses extrémités par des *tourillons* reposant sur deux supports ou *coussinets*. Sur ce cylindre est enroulée une corde fixée par une de ses extrémités au cylindre même et soutenant par l'autre bout le fardeau Q à élever; nous supposerons l'axe de rotation horizontal. Ce cylindre porte une roue d'un plus grand diamètre à laquelle est appliquée tangentiellement la puissance P.

La condition d'équilibre est que la somme algébrique des moments des forces qui agissent sur le *tour* ou treuil, par

Fig. 122.



rapport à son axe, soit nulle (*fig.* 122). Si donc on appelle r le rayon du cylindre et R le rayon de la roue, on doit avoir

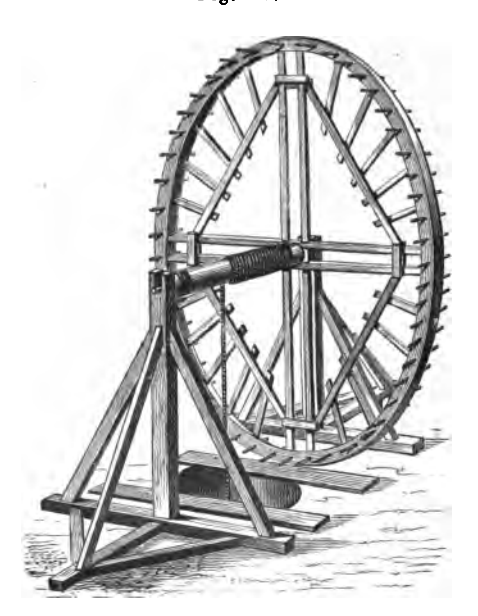
$$PR = Qr.$$

La puissance est à la résistance comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue.

On peut agir sur la grande roue au moyen d'une corde; on peut la remplacer par une manivelle, ou par une ou plusieurs barres traversant le cylindre normalement.

Dans le **treuil des carriers** (*fig.* 123) la grande roue porte des chevilles sur lesquelles un homme se déplace; en passant d'une cheville à celle qui est au-dessus, le bras de levier de la puissance augmente. Il arrivera un instant où le mouvement de la puissance l'emportera sur celui de la résistance, le fardeau s'élèvera; mais l'homme devra alors passer sur la cheville suivante de façon à conserver une position immobile dans l'espace; sans quoi, entraîné par la roue, il reviendrait à une position telle que, le moment de la puissance étant égal à celui de la résistance, le fardeau cesserait de s'élever.

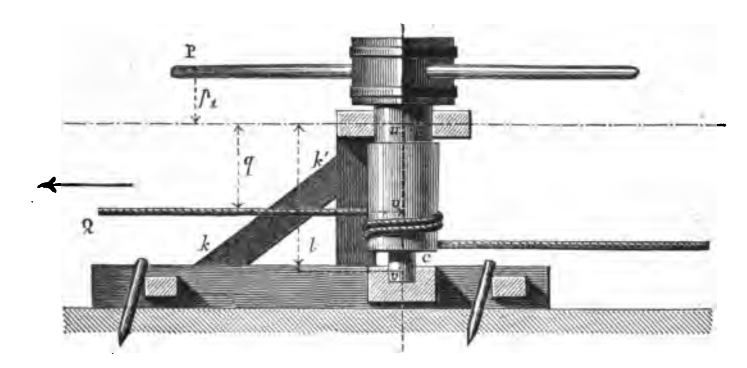
Fig. 123.



Le **cabestan** est un treuil à axe vertical manœuvré par des barres fixes horizontales; la *fig.* 124 suffit à en faire comprendre la disposition. La seule différence vient de ce que la

corde n'est pas fixée à l'arbre du treuil, elle fait seulement quelques tours sur le cylindre et le brin libre est tiré par un

Fig. 124.



homme ; l'expérience montre que la traction ainsi exercée et l'enroulement de la corde déterminent une adhérence suffisante pour s'opposer à tout glissement.

121. Remarque sur les systèmes déformables. — Les machines que nous allons examiner maintenant sont formées pour la plupart de plusieurs solides articulés les uns aux autres par des points ou des axes, ou reliés par des cordes : ces machines forment donc des systèmes matériels déformables. Pour qu'un système de ce genre soit en équilibre dans une certaine position, il faut que les forces extérieures qui lui sont appliquées remplissent les six conditions d'équilibre d'un système de forces appliquées à un corps solide. En effet, si ce système déformable est en équilibre sous l'action de certaines forces, il restera, *a fortiori,* en équilibre si on le solidifie, c'est-à-dire si on lie invariablement entre eux les corps qui le constituent de façon à former un seul corps solide. Dès lors, les forces appliquées au système doivent vérifier les conditions d'équilibre d'un système de forces appliquées à un solide.

122. Balance. — La balance se compose d'un levier horizontal ou *fléau*, ayant un axe fixe en son milieu (*fig.* 125); un prisme triangulaire O appelé *couteau* est implanté perpendiculairement au fléau, et repose par son arête inférieure sur un plan poli et dur; c'est cette arête qui constitue l'axe

Fig. 125.

de rotation. Il y a de même aux extrémités A et B, deux petits prismes placés en sens inverse du précédent et sur les arêtes desquels s'appuient les pièces, crochets ou plans α, β, auxquelles sont fixés les *plateaux* de la balance. Une aiguille a reliée au fléau se déplace devant une graduation et se trouve au zéro quand le fléau est horizontal.

Projetons sur un plan perpendiculaire à l'axe du couteau et appelons points de suspension du fléau et du plateau les projections des points ou arêtes de suspension sur ce plan.

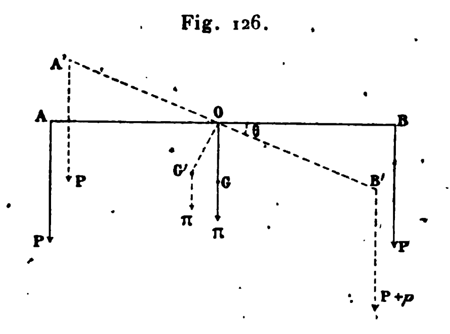
Supposons les points de suspension en ligne droite. Si le centre de gravité du fléau était exactement au point de suspension, il serait en équilibre indifférent; pour lui donner un équilibre stable, il faut que son centre de gravité soit au-dessous du point d'appui.

Il est facile, dès lors, de calculer l'angle dont s'inclinera le fléau sous une surcharge déterminée.

La balance étant en équilibre, les plateaux se placent de façon que leurs centres de gravité respectifs viennent dans la verticale de leurs points de suspension.

Soient P les poids égaux appliqués aux extrémités du fléau et qui comprennent le poids du plateau et des corps qui y sont placés, ϖ le poids du fléau appliqué en son centre de gravité G. Désignons par l la longueur commune $OA = OB$ des bras de levier du fléau supposés égaux, et par d la dis-

Fig. 126.



tance OG; ajoutons une surcharge p à droite : le fléau s'inclinera d'un angle θ (*fig.* 126) et nous aurons, en appliquant le théorème des moments par rapport à l'arête du couteau

$$P l \cos\theta + \varpi d \sin\theta = (P + p) l \cos\theta,$$

d'où l'on tire

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{pl}{\varpi d}.$$

On voit que la *sensibilité* de la balance, c'est-à-dire l'angle dont elle s'inclinera pour une surcharge égale à 1^{mg}, par exemple, sera, toutes choses égales d'ailleurs :

1° Proportionnelle à l, et en raison inverse de ϖ; mais il ne faut pas oublier que ϖ est fonction de l et c'est au

constructeur à voir s'il n'y a pas avantage, pour d'autres raisons, à construire des balances à courts fléaux;

2° En raison inverse de d;

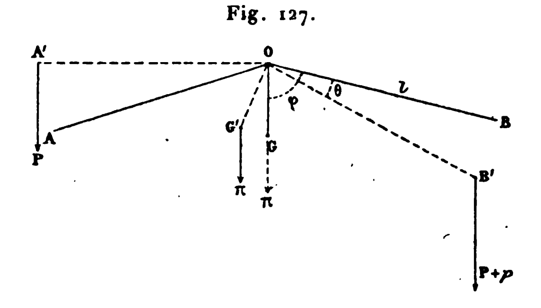
3° Indépendante de la charge $2P$.

La formule montre que, toutes les fois que l'angle θ est assez petit pour qu'on puisse confondre la tangente avec l'arc, l'angle dont s'inclinera la balance sera proportionnel à la surcharge quand cette dernière sera fort petite.

La position d'équilibre est stable, car si le fléau fait un angle θ_1 inférieur à celui qui convient à l'équilibre, le moment $pl\cos\theta_1$ est supérieur au moment $\varpi d\sin\theta_1$, la force p fait tourner le fléau vers la position d'équilibre, et inversement si cette position a été dépassée, l'angle θ_2 étant plus grand que θ, c'est le moment $\varpi d\sin\theta_2$ qui est le plus grand et la force ϖ ramène le fléau à la position d'équilibre.

Supposons les trois points AOB non en ligne droite. Dési-

Fig. 127.



gnons par l et l' les longueurs OB et OA et appelons φ et φ' les angles que font ces droites avec la droite OG.

Soit θ l'angle d'inclinaison de la balance pour une surcharge déterminée p (*fig.* 127), nous aurons, en appliquant comme ci-dessus le théorème des moments,

$$(P+p)\,l\sin(\varphi-\theta) = P'l'\sin(\varphi'+\theta) + \varpi d\sin\theta,$$

d'où nous tirons

$$\tang\theta = \frac{(P+p)\,l\sin\varphi - P'l'\sin\varphi'}{(P+p)\,l\cos\varphi + P'l'\cos\varphi' + \varpi d}.$$

Si, pour simplifier, nous supposons $l = l'$, $\varphi = \varphi'$, $P = P'$, nous obtenons la formule

$$(P+p)\,l\sin(\varphi - \theta) = P\,l\sin(\varphi + \theta) + \varpi d\sin\theta,$$

d'où nous tirons

$$(2)\qquad \tang\theta = \frac{pl\sin\varphi}{(2P+p)\,l\cos\varphi + \varpi d}$$

si l'on y fait $\varphi = \frac{\pi}{2}$; on retrouve la formule (1). Cette formule montre que la sensibilité n'est pas indépendante de la charge totale.

123. Méthodes de pesée. — Une balance est dite *juste* quand son fléau reste en équilibre à la position zéro si on charge ses plateaux de poids égaux; la balance est soumise alors à l'action de trois forces, les deux poids P égaux et son poids ϖ; à l'équilibre, cette dernière force est appliquée au point G qui doit venir se placer dans le plan vertical passant par le point O. On doit donc avoir comme condition d'équilibre, en appelant l et l' les bras de levier du fléau,

$$Pl = Pl',$$

c'est-à-dire

$$l = l'.$$

Pour qu'une balance soit juste, il faut et il suffit que ses deux bras de levier soient égaux.

On ne peut admettre que cette condition est remplie que s'il s'agit de pesées commerciales; mais s'il s'agit de pesées faites dans le laboratoire de recherches scientifiques, s'il faut par exemple peser 1^{kg} avec une approximation de 1^{mg}, l'erreur

relative admise est de $\frac{1}{10^6}$, et il est évident que le constructeur ne peut pas répondre que l'égalité des bras de levier ne comportera pas une erreur relative plus grande.

On ne peut donc admettre que la condition de justesse soit remplie.

La méthode de *double pesée* imaginée par Borda consiste à placer le corps à peser dans l'un des plateaux et à l'équilibrer par une tare placée sur l'autre plateau; on enlève ensuite le corps et on le remplace par des poids marqués dont la somme fait connaître le poids cherché; mais quand on charge la balance, on doit admettre que les trois points de suspension ne restent pas en ligne droite, et alors la sensibilité varie avec chaque pesée; pour éviter cet inconvénient on pèsera par la méthode dite *à charge constante* qui est une *méthode de double pesée à sensibilité constante*.

Supposons qu'on opère avec une balance capable de peser 1^{kg} avec une sensibilité de 1^{mg}; on met dans l'un des plateaux un poids unique de 1^{kg} et dans l'autre toute la série des poids divisionnaires dont la somme fait également 1^{kg}. Si la balance est juste, elle reste au zéro, sinon on l'y ramène par une tare placée du côté convenable; on place en second lieu le corps du côté des poids divisionnaires et l'on enlève un certain nombre de ceux-ci jusqu'à ce que l'équilibre soit rétabli; la somme des poids enlevés représente le poids du corps par double pesée. Les pesées successives doivent se faire sans changer ni le poids de 1^{kg}, ni la tare; elles se font donc à sensibilité constante puisque $(2P+p)$ est une constante.

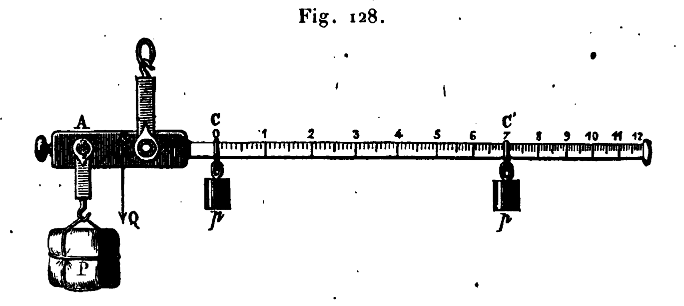
124. Balance romaine. — La balance dite *romaine* se compose d'un levier du premier genre assujetti à tourner autour d'un point fixe B (*fig.* 128). On suspend à l'extrémité A, à l'aide d'un crochet, le fardeau à peser, on lui fait équilibre par un poids constant p soutenu par un anneau que

l'on fait glisser le long du bras BC. Appelons l le bras AB, d la distance GB du centre de gravité du levier au point B et ϖ le poids du levier. L'équation d'équilibre est

$$(1) \qquad Pl + \varpi d = p \times BC'.$$

Appelons C le point où il faut placer le poids mobile p

Fig. 128.



pour obtenir l'équilibre quand il n'y a aucun fardeau attaché en A, l'équation d'équilibre se réduit dans ce cas à

$$(2) \qquad \varpi d = pBC;$$

retranchons les égalités (1) et (2), membre à membre,

$$Pl = p(BC' - BC) = pCC',$$

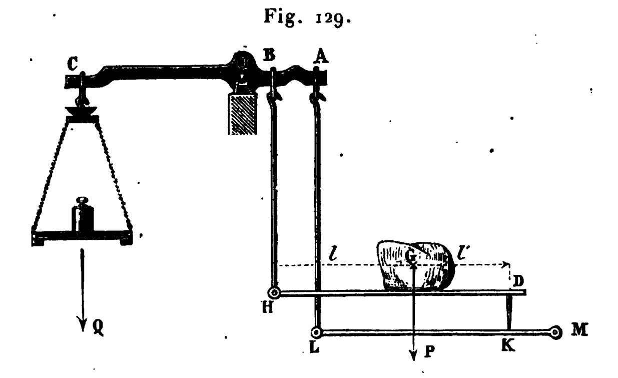
d'où

$$CC' = \frac{l}{p} P.$$

La distance CC' est donc proportionnelle au poids P à mesurer; cette remarque conduit à une méthode de graduation; on marque zéro au point C, déterminé par une expérience à vide, puis on suspend au crochet un poids de 1^{kg} et l'on marque 1 au point ainsi obtenu; on peut alors diviser cet intervalle en dix parties dont chacune correspondra à 100^{gr} et prolonger cette division s'il y a lieu.

125. Bascule ou balance de Quintenz. — Cette balance se compose de trois leviers mobiles autour d'axes horizontaux; nous pouvons, en projetant sur le plan de symétrie de l'appareil pris comme plan de figure, regarder les rotations comme s'effectuant autour de points, comme nous l'avons fait déjà pour la balance (*fig.* 129). Le premier levier LM prend son point d'appui M sur le sol; le second HD porte un tablier en bois sur lequel repose le corps de poids P que l'on veut peser et prend son point d'appui en K, sur le premier levier, par l'intermédiaire d'une courte tige rigide DK, sorte de couteau; le troisième AC tourne autour du point fixe O prenant son appui sur le sol. En C est attaché le plateau, dans

Fig. 129.



lequel on mettra les poids marqués Q; en A et B on soutient par des couteaux deux tiges AL et BH qui sont articulées à charnière par le bas respectivement, en L au premier levier et en H au second.

Soient G le point d'application du poids P, l et l' les distances de ce point à H et à D, et représentons leur somme $l+l'$ par d; décomposons la force P en deux composantes parallèles appliquées en H et en D, elles auront pour expression $\frac{Pl'}{d}$ et $\frac{Pl}{d}$. La première est transportée en B au troisième

levier par l'intermédiaire de la tige HB, la seconde est transportée en K au premier levier par le couteau DK; on peut lui substituer une force appliquée à l'extrémité L du levier LM et ayant pour valeur $\frac{P(d-l')}{d} \times \frac{KM}{LM}$ et qui sera transportée en A au troisième levier par la tige AL. Le troisième levier sera ainsi soumis à l'action de trois forces, et pour qu'il y ait équilibre on doit avoir

$$Q \times CO = \frac{Pl'}{d} \times OB + P\,\frac{d-l'}{d} \times \frac{MK}{ML} \times OA.$$

ou

$$(1)\quad Q \times CO = P \times \frac{MK}{ML} \times OA + \frac{P}{d}\,l'\left(\frac{OB \times ML - OA \times MK}{ML}\right).$$

La balance doit être construite de telle façon que les poids Q soient indépendants de la position du fardeau P sur le tablier; l' étant la longueur variable, on doit avoir

$$OB \times ML - OA \times MK = 0$$

ou

$$(2)\quad \frac{OB}{OA} = \frac{MK}{ML}.$$

Les bras OA et OB du troisième levier doivent donc être proportionnels aux bras MK et ML du premier; l'équation (1) devient

$$Q \times CO = P \times \frac{MK}{ML}\,OA$$

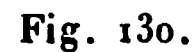
et en tenant compte de l'équation (2) elle se réduit à

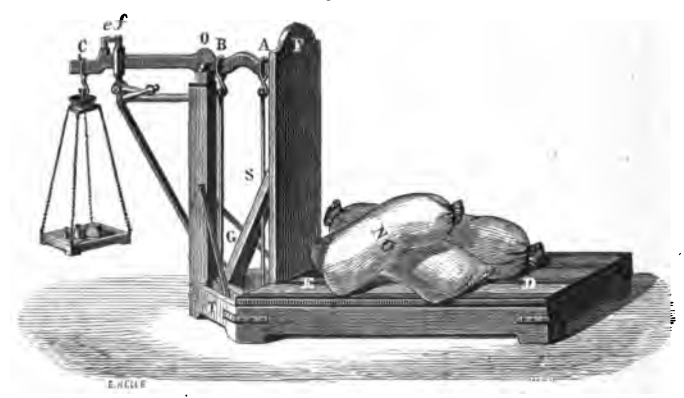
$$Q \times CO = P \times OB.$$

On prend dans la pratique $CO = 10 \times OB$.

L'effet produit dans cette bascule est donc le même que si l'on transportait, en définitive, intégralement le poids P au point B.

Cette bascule est représentée par la *fig.* 130, qui montre les différents organes et le châssis en bois, par l'intermédiaire


Fig. 130.



duquel les leviers prennent leur appui sur le sol; les pointes *e* et *f*, dont l'une est solidaire du fléau et l'autre fixée au bâti, permettent de voir si l'équilibre est obtenu dans la position horizontale du levier.

126. Poulie fixe. — 1° **Sans frottement.** — La poulie est un disque en métal ou en bois, sur la circonférence duquel est creusée une gorge.

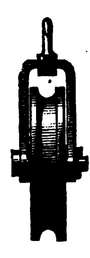
Dans la gorge de la poulie passe une corde, un fil métallique ou une chaîne, aux extrémités desquels agissent la puissance aA et la résistance bB (*fig.* 131).

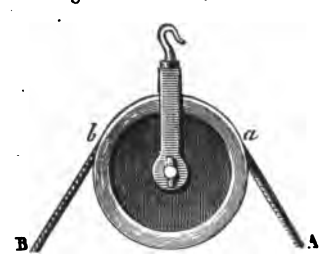
La poulie est assujettie à tourner autour d'un axe perpendiculaire à son plan passant à travers une ouverture circulaire faite en son centre et nommée *œil;* les extrémités de l'axe s'appuient sur la *chape* de la poulie, pièce de fer dont les deux branches embrassent la poulie et terminée à sa partie supérieure par un crochet fixé à un point invariable.

La poulie a simplement pour but de changer la direction d'une force sans modifier sa grandeur.

Soient, en effet, P et Q deux forces tangentiellement appliquées aux extrémités A_1, B_1 de la corde à la poulie ; pour qu'il y

Fig. 131.





ait équilibre, il faut que la somme des moments de ces deux forces, par rapport au point O, soit nulle (*fig.* 132), ce qui s'écrit

$$P \times OA - Q \times OB = o,$$

puisque les forces tendent à faire tourner la poulie en sens inverse ; mais

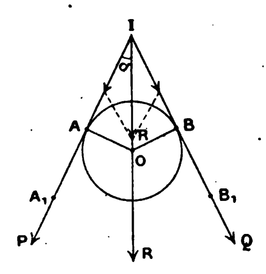
$$OA = OB,$$

donc

$$P = Q.$$

Si l'on néglige le poids de la poulie, la pression totale

Fig. 132.



supportée par l'axe est égale à la résultante des deux forces P et Q.

Transportons ces deux forces en I, leur point de rencontre,

et transportons leur résultante R en O sur l'axe; on voit immédiatement sur la *fig.* 132 que

$$R = 2P\cos\alpha,$$

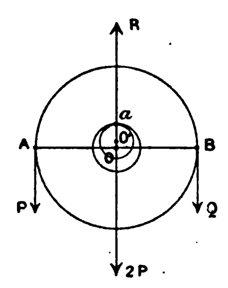
en appelant 2α l'angle des cordes.

Cette pression totale est maximum,

$$R = 2P$$

et égale au double de la résistance, si les cordes sont parallèles; elle est d'autant plus faible que la direction de la force est moins modifiée.

Fig. 133.



Supposons les forces P et Q verticales; leur résultante verticale 2P est appliquée au centre de la poulie (*fig.* 133) dont nous figurons l'axe fixe avec un rayon inférieur à celui de l'œil. La réaction de l'axe fixe contre la surface de l'œil est une force égale et de signe contraire à la pression totale; s'il n'y a pas frottement, cette réaction est normale à la surface de l'œil et passe par le centre : le contact, entre l'axe et l'œil, a donc lieu en a sur la verticale du centre de l'axe. Le centre de l'œil est sur cette même verticale et par suite il est fixe.

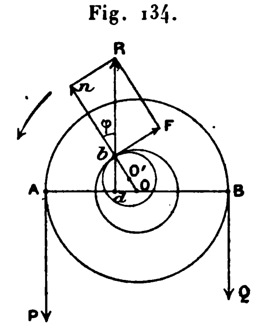
2° **Avec frottement.** — Nous nous bornerons au cas où P et Q sont verticales. Appelons φ l'angle de frottement de l'œil sur l'axe et, en supposant la résistance Q donnée, cherchons quelle est la valeur limite P qu'il faut donner à la puissance pour que la poulie soit sur le point de tourner; à ce moment la réaction R des surfaces qui frottent fait avec la normale commune un angle égal à l'angle φ de frottement; elle n'est plus normale à la surface de l'œil; mais, comme elle doit toujours être verticale pour équilibrer les deux forces P et Q,

le point de contact a ne reste pas sur la verticale du point O, il se transporte dans le sens du mouvement de la poulie, en b, où la réaction R fait avec la normale bn à la surface de l'œil un angle φ en sens contraire du mouvement qui tend à se produire (*fig.* 134).

Le centre de l'œil reste fixe et la résultante des forces P et Q doit passer par le point d, où la réaction R coupe la droite AB.

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la résultante des

Fig. 134.



forces P et Q passe par le point d, c'est-à-dire que la somme des moments des forces P et Q par rapport à ce point d soit nulle. Appelons r le rayon de l'œil et R celui de la poulie; on a

$$Od = r \sin\varphi$$

et par suite

$$P(R - r\sin\varphi) = Q(R + r\sin\varphi),$$

ce qui s'écrit

$$(1) \qquad P = Q\,\frac{1 + \dfrac{r}{R}\sin\varphi}{1 - \dfrac{r}{R}\sin\varphi};$$

telle est la limite que doit légèrement dépasser P pour que le système entre en mouvement; on voit que cette limite P de la puissance doit être supérieure à la résistance; la diffé-

rence est

$$P - Q = Q \frac{\frac{2r}{R} \sin\varphi}{1 - \frac{r}{R} \sin\varphi}.$$

Pour la diminuer, il faut :

1° Diminuer le rapport $\frac{r}{R}$, c'est-à-dire construire une poulie de grand rayon, en l'évidant, au besoin, pour diminuer son poids et la faire tourner sur un axe de faible rayon.

2° Diminuer φ, ce à quoi l'on arrive en lubrifiant à l'aide de corps gras les surfaces de l'axe et de l'œil qui sont en contact.

Pour qu'il y ait équilibre quand P est supposé supérieur ou égal à Q il faut et il suffit que P soit inférieur ou égal à la limite (1). Si l'on supposait P inférieur à Q, la poulie tendrait à tourner dans l'autre sens, mais elle resterait en équilibre, tant que Q ne dépasserait pas une certaine limite

$$(2) \qquad P \frac{1 + \frac{r}{R} \sin\varphi}{1 - \frac{r}{R} \sin\varphi}.$$

Il y a donc équilibre entre ces deux limites et les conditions d'équilibre sont en définitive exprimées par des inégalités.

127. Poulie mobile. — La poulie repose par sa gorge sur une corde, dont une extrémité est liée à un point fixe A, l'autre, B, étant tirée par une force P, la puissance (*fig.* 135). Le fardeau, qui constitue la résistance, est attaché à la chape et peut être figuré par une force Q appliquée au centre de la poulie.

La réaction du point fixe A sur la corde est une tension T

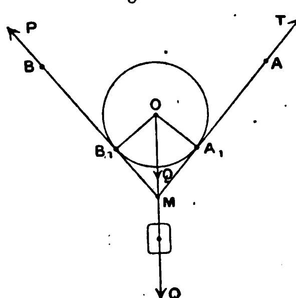
dirigée suivant A_1A (*fig.* 136); l'équilibre doit donc avoir lieu entre ces trois forces P, T et R que l'on peut supposer

Fig. 135.



appliquées en A, B et O; il faut pour cela qu'elles soient dans un même plan, qu'elles concourent en un même point et

Fig. 136.



s'y fassent équilibre. La résistance Q doit donc être dans le plan de la poulie; les forces P et T doivent se rencontrer en

un point M sur OQ; elles font donc des angles égaux avec cette droite et, comme leur résultante doit être égale et opposée à Q, qui est dirigée suivant la bissectrice de l'angle BMA, il en résulte que l'on doit avoir $P = T$; la tension est donc la même tout le long de la corde.

Si l'on appelle 2α l'angle des cordes, on a donc, comme dans le calcul de la pression totale sur l'axe de la poulie fixe,

$$Q = 2 P \cos\alpha$$

ou

$$P = \frac{Q}{2\cos\alpha}.$$

Quand on tire sur la corde B, la poulie s'élève, α augmente, la puissance augmente également, et il faudrait une puissance théoriquement infinie pour amener la poulie à reposer sur une corde tendue horizontalement. On doit donc chercher à s'éloigner, autant que possible, de ce cas limite si désavantageux; si, au contraire, les cordes sont parallèles et verticales, on a

$$P = \frac{Q}{2},$$

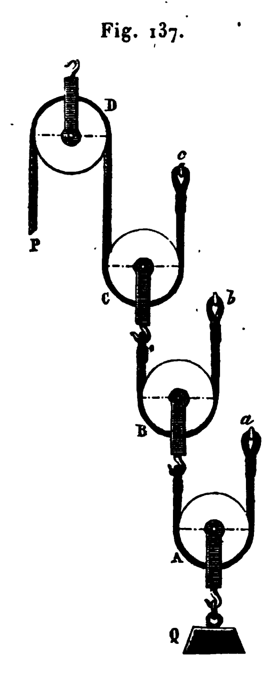
la puissance est moitié du fardeau à soulever.

128. Combinaison de poulies. — On peut combiner des poulies fixes et des poulies mobiles; on obtient ainsi des appareils qui peuvent élever de très lourds fardeaux :

1° **Première combinaison.** — Le fardeau est attaché à une première poulie mobile A, dont la corde est fixée par un bout à un point fixe *a* et par l'autre bout à la chape d'une deuxième poulie mobile B (*fig.* 137) qui est à son tour embrassée par une corde dont une extrémité *b* est fixe, tandis que l'autre est attachée à la chape d'une troisième poulie mobile C, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'enfin la corde d'une dernière poulie

mobile vienne passer sur une poulie fixe de renvoi servant à transmettre l'effort dans la direction de la puissance P.

Fig. 137.



D'après la théorie de la poulie, la tension de chaque cordon qui soutient A est

$$T_1 = \frac{Q}{2};$$

or cette tension joue le rôle de résistance pour la poulie suivante et par suite la tension des cordons de la deuxième poulie est

$$T_2 = \frac{T_1}{2} = \frac{Q}{4} = \frac{Q}{2^2}$$

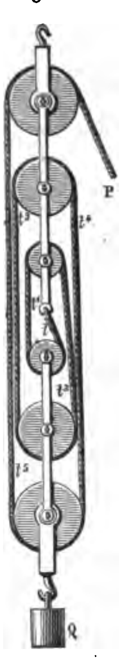
et ainsi de suite; la tension du $n^{\text{ième}}$ cordon étant la puissance P, on aura

$$P = \frac{Q}{2^n}.$$

Si donc n est le nombre des poulies, le rapport de la résistance à la puissance est 2^n.

2° **Moufles**. — Les moufles sont formées de deux systèmes de poulies réunies en nombre égal dans une même chape; l'une des chapes est fixe et l'ensemble de ses poulies constitue la *moufle fixe*, l'autre est mobile et soutient les poulies qui

Fig. 138.



forment la *moufle mobile*. La résistance est attachée à la moufle mobile; la corde unique, attachée au bas de la chape fixe, s'enroule ensuite alternativement sur une poulie de la moufle mobile et sur une poulie de la moufle fixe pour se terminer par le *garaut*, où est attachée la puissance P (*fig.* 138).

Comme il n'y a qu'un cordon, la tension est la même sur

tous les *courants* et égale à P; l'une quelconque des poulies est donc sollicitée par deux forces parallèles et égales à P qui donnent une résultante 2P que l'on peut supposer appliquée en son centre, c'est-à-dire à la chape. Si l'on appelle n le nombre des poulies montées sur la chape mobile, le nombre des cordons est $2n$ et la chape mobile sera sollicitée par une force $2nP$; l'équilibre aura lieu si

$$2nP = Q.$$

Le rapport entre la résistance et la puissance est égal au double du nombre des poulies de la moufle mobile ou au nombre $2n$ des cordons qui embrassent les poulies.

3° **Palan.** — Les poulies placées les unes au-dessous des autres forment un appareil de grande longueur; aussi pré-

Fig. 139.



fère-t-on le plus souvent monter les poulies de chaque moufle, fixe et mobile, sur un même axe. La *fig.* 139 fait comprendre ce dispositif dont la théorie est d'ailleurs identique à la précédente.

129. Cas où ces machines sont mises en mouvement, les forces étant supposées en équilibre à chaque instant.

1° **Mouvement sans frottement.** — Les machines que nous venons d'étudier sont des systèmes matériels, assujettis à certaines liaisons, sur lesquels on fait agir deux forces, la puissance P et la résistance Q, appliquées respectivement à deux points matériels A et B de la machine.

En supposant qu'il n'y ait pas de frottement, nous avons donné les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent, dans chaque position de la machine, lier P et Q pour que la machine soit en *équilibre* dans cette position. Mais, à l'exception des balances, les machines servent rarement à l'état d'équilibre : on les utilise à l'état de mouvement pour vaincre certaines résistances.

C'est en se plaçant à ce point de vue qu'on est conduit aux considérations suivantes.

Imaginons qu'il n'y ait pas de frottement et que la machine se mette en mouvement, ce qui arrivera évidemment si l'on donne pendant un court instant à la puissance une valeur un peu supérieure à la valeur P qui convient à l'équilibre : une fois la machine lancée, nous supposerons que, dans chaque position considérée, P et Q remplissent les conditions d'équilibre. Appelons V la vitesse que possède le point matériel A où est appliquée la puissance P, et W la vitesse du point matériel B où est appliquée la résistance Q; enfin appelons (P, V) et (Q, W) les angles respectifs de P avec V et de Q avec W (*fig.* 140).

On a alors le théorème général suivant :

Si les conditions de l'équilibre sans frottement sont remplies, on a à chaque instant,

$$(1) \qquad PV\cos(P, V) + QW\cos(Q, W) = 0.$$

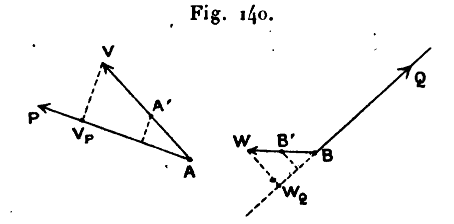
Cette relation fondamentale, que l'on peut vérifier pour

chaque machine, rattache ainsi à un principe unique les conditions de fonctionnement des machines sans frottement.

Avant de faire cette vérification nous mettrons la relation (1) sous deux autres formes équivalentes.

1° Appelons V_P la projection de la vitesse V du point

Fig. 140.



matériel A sur la puissance P et de même W_Q la projection de W sur Q : on a

$$V_P = V \cos(P, V),$$
$$W_Q = W \cos(Q, W);$$

donc la relation (1) peut s'écrire

$$PV_P + QW_Q = 0, \tag{2}$$

ou

$$\frac{P}{Q} = -\frac{W_Q}{V_P}. \tag{3}$$

Cette relation montre immédiatement que V_P et W_Q sont de signes contraires : ainsi dans la *fig.* 140 V_P est positif et W_Q négatif. En outre, on peut énoncer la relation (3) comme il suit :

Si les conditions d'équilibre sans frottement sont remplies, le rapport de la puissance à la résistance est égal au rapport inverse des vitesses des points d'application de la puissance et de la résistance estimées respectivement suivant les directions de ces deux forces.

C'est ce fait général que l'on énonce sous une forme concise en disant :

Ce qu'on gagne en force on le perd en vitesse.

2° On peut obtenir une forme purement géométrique de la relation fondamentale (1) et (2) de la façon suivante.

Supposons que, pendant le temps très court Δt la machine subisse un déplacement très petit amenant A en A' et B en B' (*fig.* 140). Alors la vitesse V est en grandeur, direction et sens, la limite de $\frac{AA'}{\Delta t}$ quand Δt tend vers zéro, et V_P est la limite de $\frac{(AA')_P}{\Delta t}$, en appelant $(AA')_P$ la projection de AA' sur P : de même W est la limite de $\frac{BB'}{\Delta t}$ et W_Q la limite de $\frac{(BB')_Q}{\Delta t}$. Il en résulte que $\frac{(W)_Q}{(V)_P}$ est la limite de $\frac{(BB')_Q}{(AA')_P}$, et la relation (3) s'écrit sous la nouvelle forme

$$\frac{P}{Q} = -\lim \frac{(BB')_Q}{(AA')_P}. \tag{4}$$

On peut donc dire aussi :

Ce qu'on gagne en force on le perd en chemin parcouru.

Remarque. — Les propositions précédentes sont générales. Dans la pratique, il arrive ordinairement que pour utiliser la puissance tout entière, c'est-à-dire pour rendre maximum le terme

$$PV \cos(P, V),$$

on la dirige dans le sens même de V, alors le cosinus devient égal à 1.

Si en outre Q est dirigé en sens contraire de W, on a $\cos(Q, W) = -1$ et la relation fondamentale prend la forme simple

$$PV - QW = 0$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \lim \frac{BB'}{AA'};$$

c'est ce qui arrive par exemple pour le treuil.

Treuil. — Le treuil (n° **120**) est un corps solide mobile autour d'un axe fixe et sollicité par deux forces P et Q appliquées en des points A et B. Ces forces sont dans des plans perpendiculaires à l'axe et sont en outre perpendiculaires aux rayons CA et DB aboutissant aux deux points d'application.

Pour qu'il y ait équilibre il faut et il suffit que la somme des moments des deux forces par rapport à l'axe soit nulle. Supposons cette condition remplie et faisons tourner le treuil avec une vitesse angulaire ω de façon que la vitesse V du point A soit dans le sens de P et, par suite, la vitesse W de B en sens contraire de Q. Comme les points A et B décrivent avec la vitesse angulaire ω des cercles perpendiculaires à l'axe ayant pour rayons $CA = R$ et $DB = r$, on a (n° **129**) $V = R\omega$, $W = r\omega$, $\cos(P, V) = +1$, $\cos(Q, W) = -1$.

La quantité (1) devient donc

$$\begin{aligned} PV\cos(P, V) + QW\cos(Q, W) &= \omega(P.R - Q.r) \\ &= \omega(\text{Mom. } P + \text{Mom. } Q) \end{aligned}$$

en appelant Mom. P et Mom. Q les moments des forces P et Q par rapport à l'axe.

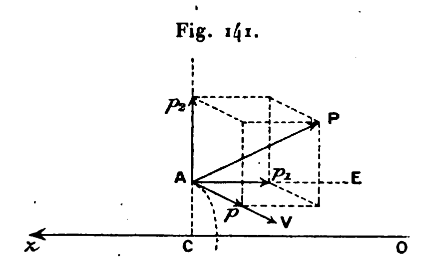
On voit que cette quantité est nulle quand les forces se font équilibre.

Par exemple, supposons qu'il faille avec un treuil élever un poids de 100^{kg} suspendu à une corde enroulée sur le treuil. Si la puissance P est dix fois plus loin de l'axe que la résistance $Q = 100^{kg}$, on pourra avec une puissance de 10^{kg} seulement *équilibrer* Q. Mais quand le treuil fonctionne, pour que le fardeau s'élève de 1^{m}, il faut que le point d'application de la puissance parcoure un chemin de 10^{m},

puisqu'à chaque instant la vitesse du point A est dix fois plus grande que celle du point B.

Corps solide mobile autour d'un axe fixe et sollicité par deux forces situées d'une façon quelconque. — Soit un solide mobile autour d'un axe Oz. Considérons une force P appliquée en un point A de ce corps (*fig.* 141). Faisons tourner le corps avec une vitesse angulaire ω, nous allons montrer qu'on

Fig. 141.



a, dans tous les cas, $PV\cos(P, V) = \omega\,\text{Mom.}P$, où Mom. P désigne le moment de P par rapport à l'axe Oz.

Supposons, pour fixer les idées, ω positif : le point A du corps décrit en tournant une portion de circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre C est sur l'axe. La vitesse V de ce point est tangente à cette circonférence dans le sens positif des rotations et donnée par

$$V = \omega\,CA.$$

Décomposons P en trois composantes rectangulaires p, p_1, p_2 dirigées respectivement suivant la direction V de la vitesse, suivant la parallèle AE à l'axe et suivant le rayon CA. Appelons en particulier p la valeur algébrique de la première composante estimée positivement dans le sens de V : en écrivant que la projection de P sur V est égale à la somme des projections des trois composantes, on a

$$P\cos(P, V) = p,$$

car les projections de p_1 et p_2 sur V sont nulles. Donc

$$PV\cos(P, V) = \omega.p.CA.$$

Mais le moment de P par rapport à l'axe est égal à la somme des moments des trois composantes p, p_1, p_2 : les composantes p_1 et p_2 étant dans un même plan avec l'axe ont des moments nuls, et l'on a

$$\text{Mom. } P = p.CA.$$

Donc enfin

$$PV\cos(P, V) = \omega \,\text{Mom.} P.$$

Cela posé, imaginons qu'on fasse agir une deuxième force Q sur le corps solide, cette force étant appliquée en un point B : quand le corps tourne, ce point B prend une certaine vitesse W et l'on a de même

$$QW\cos(Q, W) = \omega \,\text{Mom.} Q.$$

Donc

$$(1) \quad PV\cos(P, V) + QW\cos(Q, W) = \omega(\text{Mom.} P + \text{Mom.} Q).$$

Pour que les deux forces se fassent équilibre, il faut et il suffit que

$$\text{Mom.} P + \text{Mom.} Q = 0;$$

la quantité (1) est donc nulle, quand les forces considérées se font équilibre.

Levier. — Le levier est un solide mobile autour d'un point fixe O sollicité par deux forces P et Q. On peut lui imprimer un mouvement quelconque laissant le point O fixe. Pour cela, il suffit, par exemple, de le faire tourner avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe *quelconque* Oz issu de O.

Dans ce mouvement, on a, d'après ce qui précède,

$$(1) \quad PV\cos(P, V) + QW\cos(Q, W) = \omega(\text{Mom.} P + \text{Mom.} Q),$$

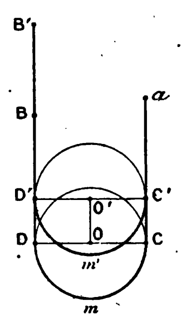
les moments étant pris par rapport à l'axe choisi Oz.

Si les forces P et Q se font équilibre, elles ont une résultante passant par le point fixe; la somme de leurs moments par rapport à l'axe Oz étant égale au moment de cette résultante est *nulle*, car la résultante rencontre l'axe en O. La quantité (1) est donc nulle pour tous les mouvements que peut prendre le levier.

Si, en particulier, on fait tourner le levier autour d'un axe Oz perpendiculaire au plan du point O et des deux forces, la vérification est immédiate : elle est identique à celle qu'on a faite pour le treuil.

Poulies. Moufles. — Dans les combinaisons de poulies que nous avons étudiées la même proposition est facile à retrouver; dans la première combinaison, si la poulie A et, par suite, le point d'application de la résistance Q s'élèvent de h, la poulie B s'est élevée de $2h$; en effet, si le centre est passé de O en O' (*fig.* 142), tel que $OO' = h$, la corde est

Fig. 142.



passée de la position $aCmDB$ à la position $aC'm'D'B'$, a étant fixe; la longueur comprise entre a et B a donc diminué de $CC' + DD' = 2h$ et comme la longueur totale de corde n'a pas changé, le point B s'est élevé de $BB' = 2h$.

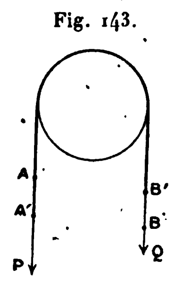
La poulie C s'est alors élevée de $2(2h) = 2^2h$ et la poulie de rang n de $2^n h$; le point d'application de la puissance a

donc décrit un chemin $2^n h$; l'appareil permet de vaincre une résistance 2^n fois plus grande que la puissance employée, mais à condition que le point d'application de la puissance parcoure un chemin 2^n fois plus grand que celui parcouru par le point d'application de la résistance.

Dans les deux autres combinaisons, si la résistance s'élève de h, chacun des $2n$ cordons parallèles est diminué de h, et par suite le point d'application de la puissance est déplacé de $2nh$; ici encore, ce qu'on a gagné en force on le perd en chemin parcouru.

2° **Mouvement avec frottement. Frottement dans la poulie.** — La proposition précédente n'est exacte que si l'on fait abstraction du frottement et, pratiquement, on gagne moins en force qu'on ne perd en chemin parcouru; prenons pour le démontrer l'exemple de la poulie O fixe, la puissance et la résistance étant verticales. Ces deux forces sont égales s'il y a

Fig. 143.



équilibre; de plus, si le point B vient en B', A vient en A' et les déplacements sont évidemment égaux (*fig.* 143), on a

$$AA' = BB',$$

les forces étant égales, les déplacements le sont aussi.

Qu'arrivera-t-il, s'il y a frottement? Nous avons démontré que, pour que le système soit sur le point de se mouvoir dans

le sens de P, le frottement exige que la puissance soit notablement plus grande que la résistance. La poulie étant supposée mise en mouvement et animée d'un mouvement uniforme, à un déplacement BB' de la résistance correspondra un déplacement égal AA' de la puissance; ainsi les déplacements sont égaux, et cependant la puissance est plus grande que la résistance.

Frottement en général. — Si une machine sans frottement doit vaincre une résistance Q donnée, il faut que la puissance dépasse légèrement la valeur P qui assure l'équilibre et alors, la machine étant en mouvement, on a

$$PV\cos(P, V) = -QW\cos(Q, W).$$

Mais s'il y a frottement, la valeur P_1 qu'il faut donner à la puissance pour que la machine soit animée d'un mouvement uniforme est notablement supérieure à la valeur P qui assurerait le mouvement uniforme s'il n'y avait pas frottement; cela tient à ce qu'il faut vaincre non seulement la résistance, mais aussi les forces de frottement; on a alors

$$P_1 > P,$$

et comme l'angle (P, V) ou (P_1, V) est aigu et même aussi voisin de zéro que possible, on a alors

$$P_1 V\cos(P_1, V) > -QW\cos(Q, W).$$

Ainsi en prenant le cas le plus simple où V est dans le sens de P_1 et W en sens contraire de Q, on aura

$$P_1 V > QW$$

et

$$P_1 \times AA' > Q \times BB'.$$

La différence $P_1 \times AA' - Q \times BB'$ est donc une quantité

positive et constitue une *perte* due au frottement. Or, on observe que les tourillons de la machine s'échauffent pendant qu'elle tourne et il semble naturel, à première vue, de lier ces phénomènes par une relation de cause à effet et de penser que la nature récupère la perte faite sous forme de chaleur; hypothèse que les expériences de Joule, en particulier, sur le dégagement de chaleur par le frottement sont venues pleinement justifier.

FIN.

NOTATIONS EMPLOYÉES POUR LES DÉRIVÉES.

Le programme n'imposant aucune notation pour les dérivées, nous avons, pour désigner les dérivées successives d'une fonction $y = f(x)$ de la variable x, employé simultanément les notations

$$y'_x \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx},$$

pour désigner la dérivée première de y par rapport à x,

$$y''_x \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dx^2},$$

pour désigner la dérivée seconde de y par rapport à x, ...

TABLE DES MATIÈRES.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES GRANDEURS GÉOMÉTRIQUES.

CINÉMATIQUE DU POINT.

A. — Mouvement rectiligne.

B. — Mouvement curviligne.

C. — Mouvement rapporté a des axes de coordonnées orthogonaux ou obliques.

D. — Diagrammes d'un mouvement.

MÉCANIQUE.

A. — Point matériel libre.

B. — Point matériel non libre.

C. — Théorie des moments.

D. — Statique des corps solides libres.

E. — ÉQUILIBRE DES CORPS NON LIBRES. — MACHINES SIMPLES.

30931 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

